现代数学丛书

龚　昇
余其煌　郑学安　著

布洛赫常数与许瓦尔兹导数

BLOCH CONSTANT AND SCHWARZIAN DERIVATIVE

GONG SHENG
YU QIHUANG
ZHENG XUEAN



·现代数学丛书·

布洛赫常数与许瓦尔兹导数

龚昇 余其煌 郑学安 著





上海科学技术出版社

责任编辑　赵序明

2

·现代数学丛书·

布洛赫常数与许瓦尔兹导数

龚　昇　佘其煌　郑学安　著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所经销　常熟市第四印刷厂印刷

开本 787×1092　小 1/16　印张 17　插页 4　字数 218,000

1998年11月第1版　1998年11月第1次印刷

印数　1—1200

ISBN 7-5323-4536-X/O·209

定价　31.50元

内 容 提 要

本书是系统小结作者与同事们在多复变数几何函数论方面的研究工作的专著。内容包括三部分：一、布洛赫(Bloch)常数；二、许瓦尔兹(Schwarz)导数；三、凸映照与星形映照。前两部分是系统叙述这两方面的研究工作；第三部分是《多复变数的凸映照与星形映照》一书的补充与进一步发展的研究工作。

本书可供数学研究工作者及高等院校数学专业的研究生、教师与高年级学生学习和参考。

Modern Mathematics Series

BLOCH CONSTANT AND SCHWARZIAN DERIVATIVE

Gong Sheng Yu Qihuang Zheng Xuean

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Bloch Constant and Schwarzian Derivative

Gong Sheng, Yu Qihuang, Zheng Xuean

Abstract

The authors and their colleagues study the geometric function theory of several complex variables systematically since 1988. This is the second monograph to collect their research works. It contains the following topics: Bloch constant; Schwarzian derivatives; convex and starlike mappings.

出版说明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作，充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员。编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

前 言

从 1988 年以来，作者与一批国内外的同事们研究多复变数几何函数论，获得了一系列的结果。为了系统地小结这方面的成果，1995 年作者之一出版了这方面的第一部专著《多复变数的凸映照与星形映照》(纯粹数学与应用数学专著第 34 号，科学出版社)。在此书中，系统地小结了作者与他的同事们在多复变数凸映照与星形映照方面的成果。本书是小结作者与同事们在多复变数几何函数论的研究工作的第二部专著，主题是 Bloch(布洛赫)常数与 Schwarz(许瓦尔兹)导数。所以本书是上述第一部专著的姐妹篇。本书共有三章。第 1 章是 Bloch(布洛赫)常数。即使在单复变数的情形，Bloch 常数仍是少数至今尚未解决的著名问题之一。在多复变数的情形，如果只考虑全纯映照类，那么有反例说明 Bloch 常数不存在。第 1 章中从单复变数的 Bloch 常数的历史回顾讲起，介绍 Bochner、陈省身、伍鸿熙等在多复变数的 Bloch 常数方面的贡献，最后叙述作者与他的同事应用李代数在有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数的工作。第 2 章讲述 Schwarz(许瓦尔兹)导数。Schwarz 导数是分析中的一个重要概念，与很多数学分支有关，如 Teichmüller 空间等。近年来，有不少数学家从各种不同的角度将 Schwarz 导数推广到高维空间。W. P. Thurston 曾说过："Schwarz 导数很像一种曲率。在微分几何中不同的曲率都是度量曲线及流形与平坦之间的偏离。而 Schwarz 导数则是度量一个共形映照与 Möbius 变换之间的偏离"。最近有不少工作是遵循这个观点将 Schwarz 导数推广到高维空间的。在本书的第 2 章中有：作者与同

事们遵循 Ahlfors 的观点，即“Schwarz 导数是交比的无穷小形式”的观点，将 Schwarz 导数推广到高维空间的工作；按照 Thurston 的观点，将 Schwarz 导数及高阶 Schwarz 导数推广到高维空间的工作；按照将 Schwarz 导数看作 **CP** 中某种曲率的观点，将 Schwarz 导数推广到高维空间的工作；以及在 Kahler 流形上的 Schwarz 导数的工作等等。在上述第一部专著(即《多复变数的凸映照与星形映照》)出版前后，十分可喜的是，我们的一批同事，如刘太顺等在多复变数凸映照与星形映照方面又获得一批很有意义的成果，使这个方向的工作日趋成熟。本书的最后一章，即第 3 章就是介绍他们的一些新成果，以作为对第一部专著的补充与发展。在全书的三章中讨论了三个不同的课题，但都同属于多复变数的几何函数论的范畴。而一些研究工作的思想与方法又是互相关联的，所以将这些内容放在一本书中是恰当的。

我们要借此机会感谢我们的一些长期合作者，尤其是王世坤教授与刘太顺博士。也要感谢陈志华教授、任福尧教授以及上海科学技术出版社对本书出版的大力支持。

作　者

1996 年 10 月

目　　录

前　言

CONTENTS

第 1 章

Bloch(布洛赫)常数

§1.1 历史回顾

Bloch 常数是古典复分析中少数至今尚未解决的著名问题之一. 几十年来,经过了很多数学家的努力,已经积累了大量重要的文献. 本书的目的之一是要讨论多复变数空间中的域上的全纯映照的 Bloch 常数. 因之,在这一节中,只是十分简要地叙述有关单复变数全纯映照的 Bloch 常数的一部分重要结果,在下一节中将给出其证明或证明的梗概.

回顾历史,1879 年 Picard 发现了极为重要的 Picard 小定理及 Picard 大定理之后,Hadamard,Borel,Landau,Schottky 以及 Carathéodory 等学者大大推进了古典复分析的发展. 到 1924 年,有两篇都是重新证明 Picard 定理的论文发表了,一是 Bloch 给出了 Picard 定理、Landau 定理及 Schottky 定理的一个“初等”证明(这些定理的叙述及证明可在大学复变函数论教科书中找到,见文献[1.17],故不在此叙述了). 所谓“初等”是指不用 Picard 当时证明 Picard 定理时用到的一些特殊的超越函数——椭圆模函数. 在 Bloch 的这篇文章中还引入了一些当时是新的概念与问题,其中包括 Bloch 常数. 另一篇是由 Nevanlinna 撰写的文章,他也给出了 Picard 定理的另一个证明,并提出了著名的亚纯函数的现代理论,即现在的“Nevanlinna 理论”.

先给出经典的 Bloch 常数及有关常数的定义如下:

若 $f(z)$为单位圆 $\Delta=\{z:|z|<1\}$上的全纯函数,并且 $f'(0)$

$=1$. 若 $a\in\Delta$，令

$$r(a,f)=\sup\{r: \text{在 } \Delta \text{ 中有单连通区域 } \Omega, a\in\Omega, f \text{ 将 } \Omega \text{ 单叶地映为 } D(f(a),r)\}, \tag{1.1.1}$$

其中 $D(f(a),r)$ 表示以 $f(a)$ 为中心，r 为半径的圆. 令

$$r(f)=\sup\{r(a,f); a\in\Delta\}. \tag{1.1.2}$$

定义　$B=\inf\{r(f): f \text{ 在 } \Delta \text{ 上全纯，且 } f'(0)=1\}$　(1.1.3)

为单位圆 Δ 上全纯函数的 Bloch 常数.

1924 年，Bloch 证明了 $B>0$. 1926 年及 1929 年，Landau[1.38],[1.39]给出了 B 的上、下界的估计为

$$0.396<B<0.555.$$

他还证明了：若 $r(f)$ 如 (1.1.2)所定义，则

$$B=\inf\{r(f); f\in\mathfrak{B}, \|f\|=1, f'(0)=1\}, \tag{1.1.4}$$

其中 $\mathfrak{B}$ 为由 Δ 上的全纯函数 $f(z)$ 且满足如下的条件：

$$\|f\|=\sup\{(1-|z|^2)|f'(z)|; z\in\Delta\}<\infty \tag{1.1.5}$$

的函数组成的函数族，这个函数族称为 Bloch 函数族，这是单复变数函数论中十分重要的全纯函数族.

1937 年，Ahlfors 与 Grunsky[1.5]在 Landau 得出上界估计的例子中看出：Landau 在这个例子中所得到的上界估计并非最优. 他们指出：从这个例子可以得到

$$B\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}=0.4719\cdots, \tag{1.1.6}$$

此外，他们还猜测这是 B 的确切数值.

重要的进展是由 Ahlfors 给出的. 他在 1938 年发表了一篇重要的文章（文献[1.1]），在此文章中，他开创了一种有力的微分—几何方法（differential - geometric method），现在称之为 Ahlfors 引理，或*超双曲度量*（ultrahyperbolic metric）. 作为这个方法的一个应用，他证明了 $B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$. 这篇文章可以视为将微分几何引入复分析的开端. 此后 Heins[1.30]在 1962 年推广了超双曲度量的概

念,证明了 Ahlfors 的下界估计 $B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$ 中的等号可以去掉,即 $B>\frac{\sqrt{3}}{4}$. 1970 年 Pommerenke[1.52]用分析的方法,也证明了这个结果. 令人惊奇的是 Ahlfors 的关于 B 的下界的估计 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 保持了半个世纪之久,无人能改进它. 直到 1990 年,Bonk[1.10]给出了函数族 $\mathfrak{B}_1$ 中的函数 f 的 $\mathfrak{Re}f'$ 的下界的精确估计,才得到 $B>\frac{\sqrt{3}}{4}+10^{-14}$. 这里 $\mathfrak{B}_1$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的全体全纯函数满足条件 $\|f\|=1$ 所组成的,这里 $\|f\|$ 由(1.1.5)所定义. 尽管 Bonk 给出了一个微小的改进,但终究打破了保持了半个世纪的记录.

与 Bloch 常数 B 相关的还有很多常数,这里只选择几个来介绍.

若 $f(z)$ 为 Δ 上的全纯函数,且 $f'(0)=1$. 令

$$\alpha(f)=\sup\{r: f(\Delta)\text{ 包含有以 } r \text{ 为半径的圆}\}. \tag{1.1.7}$$

定义 $L=\inf\{\alpha(f): f \text{ 在 } \Delta \text{ 上全纯,且 } f'(0)=1\}$ (1.1.8)

为 Landau 常数.

1929 年,Landau[1.39]证明了 $L\leqslant 0.555$,在 Rohinson 一篇未发表的文章中给出了 $L<0.544$,在 Goluzin[1.21]的书中给出了例子,可得到

$$L\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}=0.5432\cdots, \tag{1.1.9}$$

人们猜测这是 L 的确切数值.

至于 L 的下界,Ahlfors 在文献[1.1]中证明了 $L\geqslant\frac{1}{2}$. 1970 年 Pommerenke[1.52]证明了 $L>\frac{1}{2}$.

如果在 B 的定义中,限止 f 为局部双全纯,即可定义

$$B_0=\inf\{r(f): f \text{ 在 } \Delta \text{ 上局部双全纯,且 } f'(0)=1\} \tag{1.1.10}$$

为 Δ 上的局部双全纯函数的 Bloch 常数,这里 $r(f)$ 由(1.1.2)所定义. 显然 $B\leqslant B_0$.

Ahlfors[1.1]给出了 $B_0\geqslant\frac{1}{2}$,Heins[1.30]证明了 $B_0>\frac{1}{2}$,而 Pommerenke[1.52]用不同的方法也证明了 $B_0>\frac{1}{2}$,他还证明了 $L\geqslant B_0$. Peschl[1.50],[1.51]也证明了 $B_0\geqslant\frac{1}{2}$,用的是完全不同的方法. 至于 B_0 的上界也有

$$B_0\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}=0.5432\cdots,\qquad(1.1.11)$$

人们也猜测这是 B_0 的确切数值.

如果在 B 的定义中,限制 f 为双全纯,即单叶的,则可定义:

$$A=\inf\{r(f):f\text{ 在 }\Delta\text{ 上单叶全纯,且 }f'(0)=1\}\qquad(1.1.12)$$

为 Δ 上单叶全纯函数的 Bloch 常数,这里 $r(f)$ 由(1.1.2)所定义. 早在 1904 年,Hurwitz 就证明了 $A>0$. 1929 年 Landau[1.39]证明了 $A>\frac{9}{16}=0.5625$. 由于他同时证明了 $L\leqslant0.555$,故有 $L<A$. 1956 年,Reich[1.53]证明了 $A>0.569$, 1961 年,Jenkins[1.33]证明了 $A>0.5705$,这些都对 A 的下界的估计作了一些微小的改进,1935 年,Robinson[1.54]证明了 $A<0.658$.

归纳起来,回顾历史,有如下一些经典的结果:

定理 1.1.1(Hurwitz,1904) $A>0$.

定理 1.1.2(Bloch,1924) $B>0$.

定理 1.1.3(Landau) $B=\inf\{r(f):f\in\mathfrak{B},\ \|f\|=1\}$.

定理 1.1.4(Ahlfors,1938)

$$B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4},\ L\geqslant\frac{1}{2},\ B_0\geqslant\frac{1}{2}.$$

定理 1.1.5(Landau-Ahlfors-Grunsky)

$$B \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = 0.4719\cdots.$$

定理 1.1.6(Goluzin、Robinson)

$$L \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} = 0.5432\cdots.$$

定理 1.1.7(Pommerenke) $B_0 \leqslant L$.

此外还有：

定理 1.1.8(Jenkins、Robinson) $0.5705 < A < 0.658$.

定理 1.1.9(Bonk 1990) $B > \frac{\sqrt{3}}{4} + 10^{-14}$.

这四个常数 B、L、B_0 及 A 都是至今未能得到确切的数值，都是悬而未决的问题. 特别是常数 B，更为人们所关注.

但是有一类函数族，它的相应的 Bloch 常数是已经解决了的.

如果在 B 的定义中，限制 f 为双全纯凸函数，则可定义：

$$C = \inf\{r(f): f \text{ 在 } \Delta \text{ 上单叶全纯凸，且 } f'(0) = 1\} \tag{1.1.13}$$

为 Δ 上单叶全纯凸函数的 Bloch 常数，这里 $r(f)$ 由 (1.1.2) 所定义.

定理 1.1.10(Szegö、张鸣镛、Minda)① $C = \frac{\pi}{4}$.

凸函数 $f(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ 就是一个极值函数.

有三种不同的方法来证明定理 1.1.10. 在 1923 年 Szegö [1.56]

---

① 张鸣镛实际上证明了一条更广泛的定理：若 $f(z)$ 将 D 映为凸域，$f'(0)=1$，在每一个边界点都可以有经过这点包有 $f(D)$ 的以 ρ 为半径的圆，则 $f(D)$ 包有以 T_ρ 为半径的圆. 而 T_ρ 满足 $\sqrt{T_\rho(2\rho - T_\rho)}\sin^{-1}\sqrt{T_\rho/2\rho} = \frac{\pi}{4}$ $(1 \leqslant \rho < \infty)$，显然 $C = T_\infty = \frac{\pi}{4}$.

用经典分析的方法,1952 年张鸣镛[1.64]、[1.65]及 1983 年 Minda[1.45]用微分一几何的方法以及基于属于 $\mathfrak{B}_1$ 的单叶全纯凸函数的增长定理:$|f(z)|\geqslant\tan^{-1}|z|$ 及 $w=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ 将 Δ 映为 $|\mathrm{Im}w|<\frac{\pi}{4}$,立即导出 $C=\frac{\pi}{4}$(参阅文献[1.13]、[1.22]、[1.34]).

除了这些常数外,还有很多相关的常数,例如讨论的区域不仅是单位圆 Δ,也可以是 $\Delta\backslash\{0\}$、多连通区域、**C**、Riemann 球 **P**、有各种亏格的 Riemann 面等. 所讨论的函数不仅是全纯函数,也可以是亚纯函数、有界函数等. 用的度量不仅是欧氏度量,也可以是 Poincaré 度量、Fubini-Study 度量等. 而导数不仅是在通常意义下的导数,也可以是相对于各种不同度量的导数等. 于是可以得到种种 Bloch 常数. 同样,这些常数大部分都未能得到其确切的数值. 在这方面有很多的文献. 例如 Minda 的一系列的工作(见文献[1.42]~[1.49])以及 Greene 和 Wu 的工作[1.24]等等. 由于本书目的之一在于讨论多复变数的全纯映照的 Bloch 常数,故对于单复变数的 Bloch 常数的工作不在此一一列举了,有兴趣的读者可参考有关文献. 在这里作为举例介绍三项工作:一是 Greene 和 Wu 关于亚纯函数的 Bloch 常数的工作[1.24],二是 Minda[1.43]引入的 Marden 常数,三是龚昇[1.19]关于圆环上全纯函数的 Bloch 常数的下界的估计. 从这三个例子中,读者也许可以看出这些工作的大概面貌.

若 $f(z)$为在 Δ 上的亚纯函数. 如同定义在 Δ 上的全纯函数的 Bloch 常数 B 那样,以亚纯函数替代全纯函数;以球面导数(Spherical derivative) $\rho(f(z))=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ 替代通常导数的模 $|f'|$;以 Δ 中两个点 z_1 和 z_2 的弦距离(Chordal distance) $\chi(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{(1+|z_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|z_2|^2)^{\frac{1}{2}}}$ 替代欧氏距离. 这样就可以得到亚纯函数的 Bloch 常数 γ. 具体地说,如果 $f(z)$为 Δ 上的亚纯函数,并且 $|\rho(f(0))|\geqslant 1$. 若 $a\in\Delta$,令

$R(a,f)=\sup\{R$:在 Δ 中有子集 $\Omega, a\in\Omega, f$ 将 Ω 单叶地映为扩充平面 $\mathbf{C}^*$ 上以 $f(a)$ 为中心，以 R 为半径(在弦距离意义下)的圆$\}$，

$$R(f)=\sup\{R(a,f):a\in\Delta\}.$$

定义 $\gamma=\inf\{R(f):f$ 在 Δ 上亚纯，且 $|\rho(f(0))|\geqslant 1\}$ 为 Δ 上亚纯函数的 Bloch 常数 γ. 于是有：

定理 1.1.11(Greene-Wu)[1.24] $0.163<\gamma<0.429$.

以下再介绍 Minda[1.43]引入的 Marden 常数 M：

若 $f(z)$ 为 Δ 上的全纯函数，$a\in\Delta$，令 $d_h(a,z)$ 表示 a 与 z 之间的 Poincaré 距离，令

$$\Delta_h(a,s)=\{z\in\Delta:d_h(a,z)<s\},$$

$$s(a,f)=\sup\{s:f \text{ 在 } \Delta_h(a,s) \text{ 上单叶}\},$$

以及

$$s(f)=\sup\{s(a,f):a\in\Delta\},$$

则可定义 Marden 常数为：

$$M=\inf\{s(f):f \text{ 在 } \Delta \text{ 上全纯}, 0\leqslant \|f\|<\infty\},$$

这里 $\|f\|$ 由(1.1.5)所定义.

对 Marden 常数的精确数值也是未知的(见文献[1.44]).

定理 1.1.12(Minda)

$$1.316\cdots=2\tanh^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant M\leqslant 2\tanh^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}=1.401\cdots, \tag{1.1.14}$$

且猜想上界的估计就是精确数值.

最后还要提到圆环上全纯函数的 Bloch 常数的下界的估计.

若 $G=\{z\in\mathbf{C}:R<|z|<1\}$ 是 $\mathbf{C}$ 中的圆环. 若 $f(z)$ 为 G 上的全纯函数，且 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ 在 $z=\sqrt{R}$ 点处的值为 1，则也可类似定义单位圆上全纯函数的 Bloch 常数 B 与 Landau 常数 L 那样，可以定义 G 上全纯函数的 Bloch 常数 B_R 及 Landau 常数 L_R. 这只要以 G 代替 Δ，以 $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\sqrt{R}}=1$ 代替 $f'(0)=1$，即可定义 G 上的 Bloch 常数 B_R 及 Landau 常数 L_R.

1957 年,龚昇[1.19]证明了如下定理:

定理 1.1.13

$$B_R \geqslant \frac{\sqrt{3R(1-A)}}{2\sqrt{k(2A+1)-2(1-A)}} \tag{1.1.15}$$

及

$$L_R \geqslant \frac{\sqrt{R(1-A)}}{2\sqrt{k(2A+U-2(1-A)}}, \tag{1.1.16}$$

这里 k^2 为 Jacobi 椭圆函数的模:

$$k^2 = \frac{\pi^4}{x^4}\left[\sum_{v=1}^{\infty}\frac{v^2(v-1)k^2}{1-R^{2v}} + \frac{1}{4\ln\frac{1}{R}}\right],$$

$$A = \frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{d}n^2 v \mathrm{d}v,\ \sqrt{\frac{2x}{\pi}} = 1 + 2R + 2R^4 + 2R^9 + \cdots,$$

$\mathrm{d}nv$ 为 Jacobi 椭圆函数.

在这一章的 §1.2 中,将给出上述这些结果的证明或证明的梗概.十分详细的证明可参阅原文.

§1.2 Landau、Ahlfors 等人定理的证明

先来证明 Ahlfors 的结果:$B \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$(定理 1.1.4).

若 $f(z)$ 是 Δ 上的全纯函数,且 $f'(0)=1$. 记 $D(z,R)$ 为以 z 为中心,R 为半径的圆盘,∂D 为 D 的边界.若 z' 点为 $f'(z)$ 在 Δ 中的零点,$r(z,f)$ 由(1.1.1)所定义.于是在 z' 点附近 $r(z,f)=O(|f(z)-f(z')|)$,故 $\lim\limits_{z\to z'}\frac{|f'(z)|^2}{r(z,f)}$ 是存在的,因之,对任意的 a,$0<a<1$,可以定义在 $\overline{D(0,a)}$ 中的实值连续函数

$$\eta(z) = \frac{(a^2-|z|^2)^2 A|f'(z)|^2}{r(z,f)(A-r(z,f))^2}, \tag{1.2.1}$$

这里 A 为 $>3r(f)$ 的常数,$r(f)$ 由(1.1.2)所定义.由于 $\eta(0)>0$,故 $\eta(z)$ 在 $\overline{D(0,a)}$ 上有正的最大值.若 $\eta(z)$ 在点 $z_0 \in \overline{D(0,a)}$ 处取

最大值，显然 $z_0 \in \partial D(0,a)$，于是在 $\partial D(f(z_0), r(z_0,f))$ 上有点 w^*，使得在 $\overline{\Delta}$ 上有一点 z^*，$f(z^*)=w^*$，而 z^* 或是在 $\partial\Delta$ 上，或是 $f'(z^*)=0$. 令 $\rho(z)=|f(z)-f(z^*)|$，于是

$$\rho(z)\geqslant r(z,f),\quad \rho(z_0)=r(z_0,f).$$

由于 $t(A-t)^2$ 在 $0\leqslant t\leqslant \frac{A}{3}$ 中单调增加，故在 z_0 的一个邻域中有

$$\rho(z)(A-\rho(z))^2\geqslant r(z,f)(A-r(z,f))^2$$

以及 $$\rho(z_0)(A-\rho(z_0))^2 = r(z_0,f)(A-r(z_0,f))^2.$$

因此，实值函数

$$\eta_0(z)=\frac{(a^2-|z|^2)^2A|f'(z)|^2}{\rho(z)(A-\rho(z))^2} \tag{1.2.2}$$

在 $z=z_0$ 点处有极大值，这是因为

$$\eta_0(z_0)=\eta(z_0)\geqslant\eta(z)\geqslant\eta_0(z)$$

在 z_0 的一个邻域中成立.

由极大值原理，

$$\Delta\ln\eta_0(z)|_{z=z_0}\leqslant 0 \tag{1.2.3}$$

成立，这里 Δ 为 Laplace 算子. 由(1.2.2)直接计算可得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\Delta\ln\eta_0(z)|_{z=z_0} &= \frac{-2a^2}{(a^2-|z_0|^2)^2}+\frac{A|f'(z_0)|^2}{2\rho(z_0)(A-\rho(z_0))^2}\\ &= \frac{-2a^2}{(a^2-|z_0|^2)^2}+\frac{A|f'(z_0)|^2}{2r(z_0,f)(A-r(z_0,f))^2}.\end{aligned}$$

由(1.2.3)即得 $a^2\geqslant\frac{1}{4}\eta(z_0)$. 但是 z_0 是 $\eta(z)$ 在 $\overline{D(0,a)}$ 上的取最大值的点，故 $a^2\geqslant\frac{1}{4}\eta(z)$ 在 $\overline{D(0,a)}$ 中任一点 z 都成立. 特别取 $z=0$，即有

$$a^{-2}\geqslant\frac{A}{4r(0,f)(A-r(0,f))^2}.$$

由于 $t(A-t)^2$ 在 $(0,A/3)$ 中是单调增函数，故

$$a^{-2}\geqslant A/[4r(f)(A-r(f))^2].$$

令 $a\to1$，$A\to 3r(f)$，即得 $r(f)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$. 这就证明了 Ahlfors 的

结果 $B \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$.

至于 $B_0 \geqslant \frac{1}{2}$ 的证明可以相仿的证得,只要将(1.2.1)中定义的 $\eta(z)$ 代之以

$$\xi(z) = \frac{(a^2 - |z|^2)|f'(z)|}{r(z,f)\log(A/r(z,f))}, \qquad (1.2.4)$$

这里 $A > er(f)$. 由于 f 在 Δ 中局部双全纯,故 $\xi(z)$ 在 Δ 中有意义,只要对 log 函数取定一支即可. 同样可定义

$$\xi_0(z) = \frac{(a^2 - |z|^2)|f'(z)|}{\rho(z)\log(A/\rho(z))}. \qquad (1.2.5)$$

如同前述的证明那样,可证

$$\Delta\ln\xi_0(z)|_{z=z_0} \leqslant 0,$$

这里 z_0 为使 $\xi_0(z)$ 在 $\overline{D(0,a)}$ 中取最大值的点. 经过计算可得 $a^2 \geqslant \frac{1}{4}\xi^2(z_0)$,于是可得

$$a^2 \geqslant a^4[4(r(0,f))^2(\log(A/r(0,f))^2]^{-1}.$$

由于 $t\log(A/t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant er(f)$ 中单调增加,故得

$$1 \geqslant a^2[4(r(f))^2(\log A/r(f))^2]^{-1}.$$

令 $a \to 1$, $A \to er(f)$,即得 $r(f) \geqslant \frac{1}{2}$. 这就证明了 Ahlfors 的结果 $B_0 \geqslant \frac{1}{2}$(定理1.1.4).

现在来证明 $L \geqslant \frac{1}{2}$:

若 $f(z)$ 是 Δ 上的全纯函数,且 $f'(0)=1$, 令

$$R(z,f) = \sup\{r : D(f(z),r) \subset f(\Delta)\}.$$

显然,$R(z,f) \neq 0$ 当 $z \in \Delta$ 时. 于是可以在 Δ 上定义 $\log R(z,f)$. 将(1.2.4)中的 $r(z,f)$ 代之以 $R(z,f)$, $r(f)$ 代之以 $\alpha(f)$,如同证明 $B_0 \geqslant \frac{1}{2}$ 一样,一步步进行计算,即得 Ahlfors 的结果 $L \geqslant \frac{1}{2}$(定理1.1.4).

以上由我们给出的这三个常数的下界估计的证明与原有的证

明略有一点不同.

下面给出这三个常数上界的估计的证明:

若 $f(\zeta)$在$|\zeta|<1$中全纯,则其 Schwarz 导数定义为

$$\{f;\zeta\}=\frac{f'''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^2.$$

它有一条重要的性质,是 f 在分式线性变换下,Schwarz 导数是不变的,即:若 $f_1(\zeta)=\dfrac{af(\zeta)+b}{cf(\zeta)+d}$ $(a,b,c,d$ 为复常数),且 $ad-bc\neq 0$,则

$$\{f_1(\zeta);\zeta\}=\{f(\zeta);\zeta\}.$$

利用这个性质及 Schwarz 反射原理(参阅文献[1.17]中第4章),可以证明函数

$$z=\zeta\frac{\displaystyle\int_0^1 t^{-\frac{q+1}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}+\frac{1}{n}}(1-\zeta^n t)^{\frac{q-1}{2}-\frac{1}{n}}\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^1 t^{-\frac{q+1}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}-\frac{1}{n}}(1-\zeta^n t)^{\frac{q-1}{2}+\frac{1}{n}}\mathrm{d}t}\tag{1.2.6}$$

将单位圆$|\zeta|<1$单叶地映为 z 平面上的正圆弧 n 边形,顶点在 $e^{\frac{2\pi i}{n}k}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$,顶角为 $q\pi$,且将 $\zeta=0$ 映为 $z=0$, $e^{\frac{2\pi i}{n}k}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$不变(详细推导可参阅文献[1.21]第 3 章 § 2).

特别取 $n=3$,即考虑正圆弧三角形,这时(1.2.6)成为

$$z=\zeta\frac{\displaystyle\int_0^1 t^{-\frac{q+1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{6}+\frac{q}{2}}(1-\zeta^3 t)^{-\frac{5}{6}+\frac{q}{2}}\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^1 t^{-\frac{q+1}{2}}(1-t)^{-\frac{5}{6}+\frac{q}{2}}(1-\zeta^3 t)^{-\frac{1}{6}+\frac{q}{2}}\mathrm{d}t}.\tag{1.2.7}$$

记这个函数为 $f_q(\zeta)$,于是 $f_q(\zeta)$将$|\zeta|<1$单叶地映为 z 平面上的正圆弧三角形 Δ_q; $e^{\frac{2\pi i}{3}k}$ $(k=0,1,2)$ 映为自身. Δ_q 的顶点在 $e^{\frac{2\pi i}{3}k}$ $(k=0,1,2)$,顶角为 $q\pi$. 当 $q=\dfrac{1}{3}$时,Δ_q 即为直线边的正三角形.

$f_q(\zeta)$在 $\zeta=0$处可展成 $f_q(\zeta)=\alpha_1\zeta+\cdots$,而

$$\alpha_1=f_q'(0)=\frac{B\left(\dfrac{1-q}{2},\dfrac{1+q}{2}+\dfrac{1}{3}\right)}{B\left(\dfrac{1-q}{2},\dfrac{1+q}{2}-\dfrac{1}{3}\right)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}. \tag{1.2.8}$$

函数 $w=F(z)=f_{\frac{1}{3}}\left(f_{\frac{1}{6}}^{-1}(z)\right)$ 将 $\Delta_{\frac{1}{6}}$单叶地映为 $\Delta_{\frac{1}{3}}$；将 $z=0$映为 $w=0$；$e^{\frac{2\pi i}{3}k}$ 映为自身. 由 Schwarz 反射原理，$F(z)$可以解析开拓到圆$|z|<R$ 中，而圆周$|z|=R$ 正交于三角形 $\Delta_{\frac{1}{6}}$的三条边，$F(z)$在$|z|<R$中单叶全纯. 由平面几何知 $R=\sqrt{\sqrt{3}+1}$. 于是函数 $w=F(z)$将$|z|<R$ 映为 Riemann 面 $\mathfrak{F}_1$. $\mathfrak{F}_1$与$|z|<R$ 之间是一一对应的. $\mathfrak{F}_1$是由与 $\Delta_{\frac{1}{3}}$相合同的无数个三角形的集所构成的，其中每一个三角形的每一个顶点都是 $\mathfrak{F}_1$的二阶支点. 故在 $\mathfrak{F}_1$上不存在半径大于1的单叶圆.

函数

$$w=f(z)=\frac{F(Rz)}{RF'(0)}=z+\cdots$$

在$|z|<1$中全纯，将$|z|<1$映为 Riemann 面 $\mathfrak{F}$，在 $\mathfrak{F}$ 上不存在半径大于$\frac{1}{RF'(0)}$的单叶圆. 因之，$B\leqslant\frac{1}{RF'(0)}$. 由于 $R=\sqrt{\sqrt{3}+1}$，F 的定义及(1.2.8)，就可得到

$$B\leqslant\frac{f'_{\frac{1}{3}}(0)}{f'_{\frac{1}{6}}(0)}\frac{1}{R}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\sqrt{\sqrt{3}+1}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)},$$

这就证明了(1.1.6)(定理1.1.5).

在(1.2.7)中令 $q=0$，就得到函数

$$f_0(\zeta)=\zeta\frac{\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}(1-\zeta^3t)^{-\frac{5}{6}}\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}(1-\zeta^3t)^{-\frac{1}{6}}\mathrm{d}t}.$$

$f_0(\zeta)$将$|\zeta|<1$单叶地映为 z 平面上的正圆弧三角形 Δ_0，顶点为 $e^{\frac{2\pi i}{3}k}$ $(k=0,1,2)$，顶角为0，$f_0(\zeta)$将0及 $e^{\frac{2\pi i}{3}k}$ $(k=0,1,2)$映为自身.

函数 $w=F_0(z)=f_{\frac{1}{3}}(f_0^{-1}(z))$将 Δ_0单叶地映为 $\Delta_{\frac{1}{3}}$，将0及 $e^{\frac{2\pi i}{3}k}$ $(k=0,1,2)$映为自身. 由 Schwarz 反射原理，$F_0(z)$可以解析开拓到圆$|z|<R$ 中，而$|z|=R$ 正交于 Δ_0的三条边. 由于 Δ_0的顶角为0，故 $R=1$，即$|z|=1$与 Δ_0的三条边正交，$w=F_0(z)$将$|z|<1$映为 Riemann 面 $\mathfrak{F}_0$. $\mathfrak{F}_0$与$|z|<1$之间一一对应. $\mathfrak{F}_0$是由无数个三角形的集所构成的，这些三角形是由以具有相似系数为$\frac{1}{F'(0)}$的相似变换从 $\Delta_{\frac{1}{3}}$变换面得到的. 由于 $e^{\frac{2\pi i}{3}k}$ $(k=0,1,2)$都不在$|z|<1$中，故这些三角形的任一顶点都不属于 $\mathfrak{F}_0$. 因之，$\mathfrak{F}_0$不掩有半径大于$\frac{1}{F'(0)}$的单叶圆，于是

$$L\leqslant\frac{1}{F'(0)}=\frac{f'_0(0)}{f'_{\frac{1}{3}}(0)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)},$$

这就证明了(1.1.9)(定理1.1.6).

在上述证明中可以看出：$\mathfrak{F}_0$的内部无支点，故 $F_0(z)$在$|z|<1$中局部双全纯，这也证明了(1.1.11).

对于这三个常数的上界的估计更仔细的推导可参阅文献[1.21]第3章§2及第8章§7或文献[1.42].

接下来证明 Bonk 的结果. 在证之前先来证明 Landau 的定理(1.1.4)(定理1.1.3).

显然，对 Bloch 常数的研究只要在 $\mathfrak{B}$ 中满足 $f(0)=0,f'(0)=1$ 的那些函数中讨论即可. 若 f 为 Bloch 常数的极值函数，即 $r(f)=B$，于是可在 Δ 中任取一点 z_0，而 $f'(z_0)\neq0$. 作

$$g(z)=\frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right)-f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)},$$

于是 $g\in\mathfrak{B}$，且 $g(0)=0,g'(0)=1$，而 $r(g)\leqslant\frac{B}{|f'(z_0)|(1-|z_0|^2)}$. 因此，$|f'(z_0)|(1-|z_0|^2)$必须$\leqslant1$. 否则，与 B 的定义相矛盾. 即若 $f'(z_0)\neq0$，则$|f'(z_0)|(1-|z_0|^2)\leqslant1$，而 $f'(z_0)=0$显然也使上

式成立. 但当 $z=0$ 时, $|f'(z)|(1-|z|^2)=1$, 故

$$\|f\| = \sup\{|f'(z)|(1-|z|^2), z\in\Delta\} = 1.$$

这就证明了(1.1.4).

1990年, Bonk[1.10]证明了 $B>\frac{\sqrt{3}}{4}+10^{-14}$, 打破了 Ahlfors 保持了半个世纪的纪录.

现在来叙述他对 Ahlfors 的结果 $B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的另一个证明:

令 $F(w)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1-w}{1-w/3}$ 及 $G(w)=\frac{9}{4}w\left(1-\frac{w}{3}\right)^2$, 当 $w\in\overline{\Delta}$. 显然, 当 $w\in\partial\Delta$ 时, $|G(w)(1-|F(w)|^2)|=1$. 记

$$\mathfrak{B}_1 = \{f\in\mathfrak{B}: \|f\|=1, f'(0)=1, f(0)=0\},$$

如前所述, 对 Bloch 常数的估计只要在 $\mathfrak{B}_1$ 中进行即可, 即只要考虑

$$\sup_{z\in\Delta}|f'(z)|(1-|z|^2)=1$$

这种函数 f 即可. 于是当 $w\in\partial\Delta$ 时, $\left|\frac{f'(F(w))}{G(w)}\right|\leqslant 1$ 成立. 令

$$H(w) = \left[\frac{f'(F(w))}{G(w)}-1\right]\frac{w}{(w-1)^2}.$$

由于 $f(z)\in\mathfrak{B}_1$, 故有 $f''(0)=0$. 因之, $H(w)$ 在 $w=1$ 处是全纯的, $H(w)$ 在 $\overline{\Delta}$ 上全纯. 易见, 当 $w\in\partial\Delta$ 时, $\Re H(w)\geqslant 0$. 因之 $\Re H(w)\geqslant 0$ 当 $w\in\overline{\Delta}$ 时成立. 这就得到 $\Re f'(F(w))\geqslant G(w)$ 当 $w\in[0,1]$ 时成立. 令 $z=F(w)$, 代入上式即得: 当 $z\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ 时,

$$\Re f'(z)\geqslant\frac{1-\sqrt{3}|z|}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3} \tag{1.2.9}$$

成立. 对于 $|z|\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$ 中的任一点 $z=re^{i\theta}$, 只要考虑函数 $g(z)=e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$, 立即得到(1.2.9)对任意在 $|z|\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$ 中的点 z 都成立.

由(1.2.9)即得 $\Re e f'(z)>0$ 当 $|z|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时成立. 故 $f(z)$ 在 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 中为单叶. 由于 $f(0)=0$, 故由(1.2.9), 有

$$\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi}\right)\right| \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Re e f'(te^{i\varphi})\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-\sqrt{3}t}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

于是 $f\left(D\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ 的任一边界点与原点的距离不小于 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 即 $f\left(D\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\supset D\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 这就证明了 $B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$.

至于他证明 $B>\frac{\sqrt{3}}{4}+10^{-14}$(定理1.1.9)的梗概如下:

若 $f(z)\in\mathfrak{B}_1$, $f'(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$. 首先证明:

$$|a_2|\leqslant 1,\quad |a_3|\leqslant 5$$

以及

$$\sum_{n=4}^{\infty}|a_n|\cdot|z|^n\leqslant 10|z|^4$$

当 $|z|\leqslant\frac{1}{10}$ 时成立. 由此可证: 若 $f\in\mathfrak{B}_1$, $\varphi_0=2\sin^{-1}\frac{1}{20}$, $|z|\leqslant\frac{1}{1000}$, 则

$$\frac{1}{2}\Re e[f'(z)+f'(e^{i\varphi}z)]\geqslant\frac{1-\sqrt{3}|z|}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^3}+\frac{1}{2}|z|^3$$

当 $\varphi\in[-\pi,\pi]\setminus[-\varphi_0,\varphi_0]$ 时成立. 利用这个不等式在其两端积分, 就可证明 $B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{13}10^{-12}$. 详细的叙述可参阅文献[1.10].

Bonk 的结果一方面对 Ahlfors 的结果作了微小的改进; 另一方面给出了 Ahlfors 的结果的一个简单的分析证明, 当然关键的一步是证明(1.2.9). (1.2.9)称为 Bonk *偏差定理*.

1990年，Minda[1.44]给出（1.2.9）一个几何的证明，并指出(1.2.9)当$|z|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$时也成立. 在点$re^{i\theta}\neq 0$处，(1.2.9)式中等号成立，当且仅当$f(z)=e^{i\theta}f_1(e^{-i\theta}z)$，这里$f_1(z)=\int_0^z \frac{1-\sqrt{3}t}{\left(1-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^3}\mathrm{d}t$.

1992年，刘向阳与Minda[1.41]给出了$\mathfrak{B}_1$中局部双全纯函数的相应的偏差定理. 他们证明了：若$f\in\mathfrak{B}_1$，且在Δ中局部双全纯，则当$|z|\leqslant\frac{1}{2}$时，有

$$\Re e f'(z)\geqslant\frac{1}{(1-|z|)^2}\exp\left\{\frac{-2|z|}{1-|z|}\right\},$$

在点$re^{i\theta}\neq 0$处，上式等号成立，当且仅当

$$f(z)=f_0(e^{i\theta}z),$$

这里

$$f_0(z)=-\frac{e}{2}\exp\left\{-\frac{1+z}{1-z}\right\}+\frac{1}{2}.$$

他们利用这个$\mathfrak{B}_1$中局部双全纯函数的偏差定理，给出了$B_0>\frac{1}{2}$的另一个证明.

在Bonk定理的证明过程中，也已证明了(1.1.14)的左端的不等式成立，即证明了Marden常数的下界的估计. 而Ahlfors-Grunsky用来证明$B\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\sqrt{\sqrt{3}+1}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$的那个函数，可以用来证明(1.1.14)的右端的不等式成立(定理1.1.12).

接下来给出A的上、下界的估计的证明.

1935年，Robinson[1.54]给出了A的上界的估计：$A<0.658$(定理1.1.8).

令$K(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ $(z\in\Delta)$为Koebe函数

$$p = p(r) = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad (0 < r < 1).$$

显然，$w_1 = K^{-1}(pK(z))$ 将 Δ 映为 Δ 除去一条由 -1 到 $-r$ 的裂纹．于是 $w_2 = [K^{-1}(pK(z^3))]^{\frac{1}{3}}$ 将 Δ 映为 Δ 除去由 $e^{\frac{i\pi}{3}}$、-1、$e^{-\frac{i\pi}{3}}$ 三点出发的三条指向中心的裂纹，其长度为 $r^{\frac{1}{3}}$.

令 $p_1 = p(r_1)$，$p_2 = p(r_2)$ $(0<r_1<1, 0<r_2<1)$，p_0 为满足 $\frac{1}{p_0 p_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1$ 的值，函数 $w_3 = K^{-1}(p_1 K(-K^{-1}(p_0 K(z))))$ 将 Δ 映为 Δ 除去二条裂纹，一条由 -1 到 $-r_1$；一条由 1 到 r_2，且 $w_3'(0) = \frac{1}{4}\left(r_1 + \frac{1}{r_1} + r_2 + \frac{1}{r_2}\right)$.

令 $b = [2\sqrt{3} - 3]^{\frac{1}{2}}$，$a = 1 + (b^2 + 2b + 2)^{\frac{1}{2}}$，$r_1 = \frac{1}{a^3}$，$r_2 = \frac{8}{a^3}$，于是 $w_4 = [w_3(z^3)]^{\frac{1}{3}}$ 将 Δ 映为 Δ 除去6条裂纹，3条由 $e^{i\frac{\pi}{3}}$、-1、$e^{-i\frac{\pi}{3}}$ 出发，指向中心，长度为 $\frac{1}{a}$；3条由 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$、$e^{i\frac{4\pi}{3}}$、1出发，指向中心，长度为 $\frac{2}{a}$. 从这图形直接观察到，它能容纳的圆最大半径不大于 $\frac{1}{a}$. 由于 $|w_4'(0)|^3 = |w_3'(0)|$，$A|w_4'(0)| \leqslant \frac{1}{a}$，即得 $A^3 < \frac{9}{4}\left(\frac{1}{a^6} + \frac{1}{8}\right)$，经直接计算可得到 $A < 0.658$.

下面给出 $A > 0.569$ 的证明，这是 Reich[1.53]的结果.

如前所述，只要在 $\mathfrak{B}_1$ 中考虑即可．若 $f \in \mathfrak{B}_1$，$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$，则易证明 $a_2 = 0$，$|a_3| \leqslant \frac{1}{3}$ 以及 $|f(z)| \leqslant \frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$.

令 $0<t<1$，$M(t) = \frac{1}{2t}\log\frac{1+t}{1-t}$，$f(z,t) = \frac{1}{t}f(tz)$，$\phi(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$.

定义

$$\mathcal{F}(z,t) = M(t)\left[\phi\left\{\left(\frac{f(z,t)}{M(t)}\right)^3\right\}\right]^{\frac{1}{3}} = z + a_3 t^2 z^3 + \cdots.$$

若 $f(z)$ 不取 $\gamma > 0$，则 $\widetilde{\mathcal{F}}(z,t)$ 不取 $\gamma(t) = \frac{\gamma}{t}\left[1 + \frac{\gamma^3}{t^3 M^3(t)}\right]^{-2/3}$，令

$$g(z,t) = \mathcal{F}(z,t)\left[1 - \frac{\mathcal{F}(z,t)}{\gamma'(t)}\right]^{-1} = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots,$$

则 $b_2 = \frac{1}{\gamma(t)}$，$b_3 = \frac{1}{\gamma^2(t)} + a_3 t^2$. 显然，$g(z,t)$ 仍在 $|z|<1$ 单叶全纯，由 Fekete-Szegö定理（参阅文献[1.21]第4章 § 8），知

$$|b_3 - \alpha b_2^2| \leqslant 2^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} + 1$$

对任意 $\alpha \in [0,1]$ 都成立. 由此即得：

$$|\gamma(t)| \geqslant \left[\frac{3(1-\alpha)}{6\exp\{-2\alpha/(1-\alpha)\} + 3 + t^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

取 $\alpha = 0.372947$，$t = 0.99925$，即得 $|\gamma| > 0.569$. 这就证明了 $A > 0.569$. 如前所述，1961年，Jenkins[1.33]略加改进为 $A > 0.5705$. 但证明较为复杂，故从略.

现在来证明 $C = \frac{\pi}{4}$（定理1.1.10）.

先证 Finkelstein[1.18]关于单叶全纯凸映照的增长定理：

若 $g(z) = c_1 z + \cdots$ 在 Δ 上全纯，且将 Δ 映到 Δ 之内. 令 $l(z) = \frac{1}{z} g(z) = c_1 + \cdots$，则 $|l(z)| < 1$，当 $z \in \Delta$ 时. 令 $h(z) = \frac{l(z) - c_1}{1 - \bar{c}_1 l(z)} = b_1 z + \cdots$，则 $h(0) = 0$，$|h(z)| < 1$，当 $z \in \Delta$ 时. 故由 Schwarz 引理，$|h(z)| \leqslant r$，$r = |z|$. 于是

$$|g(z)| = \left|z \frac{h(z) + c_1}{1 + \bar{c}_1 h(z)}\right| \leqslant r \frac{|h(z)| + |c_1|}{1 + |c_1 h(z)|} \leqslant r\left(\frac{r + |c_1|}{1 + |c_1| r}\right). \tag{1.2.10}$$

若 $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ 为 Δ 上的全纯凸映照，则

$$\Re\left(1 + \frac{zf''}{f'}\right) \geqslant 0.$$

令 $1 + \frac{zf''}{f'} = \frac{1+g}{1-g}$，于是 $|g| < 1$，而

$$1 + \Re\left\{\frac{zf''}{f'}\right\} = \Re\left\{\frac{1+g}{1-g}\right\} = \frac{1 - |g|^2}{|1-g|^2} \geqslant \frac{1 - |g|}{1 + |g|},$$

即得

$$\Re\left\{\frac{zf''}{f'}\right\} \geqslant \frac{-2|g|}{1 + |g|}.$$

由(1.2.10)得$|g|\leqslant\frac{r+\rho}{1+\rho r}$,式中$\rho=|a_2|$,代入上式,即得

$$\Re e\left\{\frac{zf''}{f'}\right\}\geqslant\frac{-r(r+\rho)}{1+2\rho r+r^2}.$$

由于
$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|=\Re e\left\{\frac{zf''}{f'}\right\},$$

即有
$$\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|\geqslant\frac{-2(r+\rho)}{1+2\rho r+r^2}.$$

两边对r积分,即得

$$|f'(z)|\geqslant\frac{1}{1+2\rho r+r^2},\ r=|z|.$$

若Γ为0到$f(z)$的直线,$\gamma=f^{-1}(\Gamma)$,则

$$|f(z)|=\int_\gamma|f'(z)||dz|\geqslant\int_0^r|f'(s)|ds\geqslant\int_0^r\frac{ds}{1+2\rho s+s^2}$$
$$=\frac{1}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\tan^{-1}\left[\frac{r+\rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$
$$-\frac{1}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\tan^{-1}\frac{\rho}{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

而满足条件$\sup\limits_{z\in\Delta}|f'(z)|(1-|z|^2)=1$的$f(z)$,已知$f''(0)=0$. 即$a_2=0,\rho=0$. 于是对于这类函数就有不等式$|f(z)|\geqslant\tan^{-1}r$. 由于$f(\Delta)$为凸函数,故由此立得$C\geqslant\frac{\pi}{4}$. 而凸函数$w=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}=z+\cdots$将$\Delta$映为$|\mathrm{Im}w|<\frac{\pi}{4}$,故$C\leqslant\frac{\pi}{4}$. 从而得$C=\frac{\pi}{4}$.

由 Ahlfors-Grunsky 所讨论的映照,立即可得定理1.1.11(Greene 和 Wu)中的上界的估计. 至于下界的估计,由于证明较长,在此从略.

最后介绍一下证明(1.1.15)及(1.1.16)(定理1.1.13)的梗概[1.19].

先证G的 Bergman 核函数$K(z,\bar z)$为

$$\frac{x^2}{\pi^3r^2}\left[\mathrm{dn}^2\left(\frac{x}{\pi i}\ln\frac{r^2}{R}\right)-\frac{1}{x}\int_0^x\mathrm{dn}^2v\mathrm{d}v\right],$$

此处$r=|z|$. 于是G的 Bergman 度量为$T(z,\bar z)|dz|^2$,而$T(z,\bar z)$

为

$$\frac{2k^2x^2}{\pi^2|z|^2(\mathrm{dn}^2u - A)^2}\left[(\mathrm{dn}^2u - A) - (\mathrm{cn}^2u - \mathrm{sn}^2u\,\mathrm{dn}^2u) + 2Ak^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{cn}^2u\right],$$

式中 $u=\frac{x}{\pi i}\cdot\ln\frac{|z|^2}{R}$，$\mathrm{sn}u$、$\mathrm{cn}u$ 及 $\mathrm{dn}u$ 等为 Jacobi 椭圆函数(参阅文献[1.8]第5章)，其曲率 τ 为

$$\frac{-1}{T}\left[-2T + \frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}\ln\{(\mathrm{dn}^2u - A)(\mathrm{cn}^2u - \mathrm{sn}^2u\,\mathrm{dn}^2u) + 2Ak^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{cn}^2u\}\right].$$

进一步证明 τ 在 $|z|=\sqrt{k}$ 处取最小值，然后应用 Ahlfors 的微分一几何的方法，即可得(1.1.15)及(1.1.16).

在文献[1.19]中，还给出了 n 连通区域的 Bloch 常数与 Landau 常数的下界估计.

§ 1.3　反例，K-拟似共形映照

将古典几何函数论的成果推广到多复变数中，往往有反例说明其不成立. Bloch 常数就是这样.

如同单复变数的情形一样，可以定义多复变数全纯映照的 Bloch 常数.

若 $D\subset\mathbf{C}^n$ 为域，$0\in D$，$z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n$. 若全纯映照 $f(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$ 将 $D\to\mathbf{C}^n$，且 $|\det J_f(0)|=1$ 或 $J_f(0)=I$，式中 J_f 表示 f 的 Jacobian 矩阵，I 为单位方阵. 若 $a\in D$，令

$$r(a,f)=\sup\{r: 在 D 中有单连通区域 \Omega, a\in\Omega, f 将 \Omega 双全纯地映为以 f(a) 为中心, r 为半径的球\}, \tag{1.3.1}$$

$$r(f) = \sup\{r(a,f); a \in D\}, \tag{1.3.2}$$

则可定义：

$$B = \inf\{r(f): f 在 D 上全纯, 且 |\det J_f(0)| = 1 或 J_f(0) = I\} \tag{1.3.3}$$

为 D 上全纯映照的 Bloch 常数.

同样可以定义 L、B_0、A、C 等.

很早就有人举出各种反例,说明在多复变数中,Bloch 常数是不存在的.

第一个明确给出反例的也许是伍鸿熙[1.63]. 他给出了两个反例. 现举其中之一如下:

在 $\mathbf{C}^2$中的单位球 $B^2=\{z=(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2: |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$上,定义映照

$$w = f_n(z) = \left(nz_1, \frac{1}{n}z_2\right),$$

式中 n 为任意正整数,则显然 $f_n(0)=0$, $\det J_{f_n}(0)=1$, $f_n(z)$将 B^2映为 $n^{-2}|w_1|^2+n^2|w_2|^2<1$. 于是在 $f_n(B^2)$中包有的球的最大半径不能超过$\frac{1}{n}$. 由于 n 可任意选取,故在 B^2上的全纯映照 f 且 $f(0)=0$, $|\det J_f(0)|=1$的全体所组成的映照族,其 Bloch 常数 B 不存在. 不但如此,这个例子也说明:若 f 满足 $|\det J_f(0)|=1$的条件,则 L、B_0、A、C 都不存在. 显然,在 $\mathbf{C}^n$ 上同样可以举出反例来. 如果对条件$|\det J_f(0)|=1$进一步加强,例如要求 f 满足 $J_f(0)=I$,那么 Bloch 常数 B 是否存在呢?

1977年,Harris[1.29]给出了如下的反例,说明 Bloch 常数 B 依然不存在. 实际上,他的反例证明了:对 $\mathbf{C}^2$的任意有界域 Ω, $0\in\Omega$,任给 $\delta>0$,则在 Ω 上一定存在一个双全纯映照 $h(z)$, $h(0)=0$, $J_h(0)=I$, $h:\Omega\to\Omega'\subset\mathbf{C}^n$,而 Ω'中不可能包有以 δ 为半径的球.

不失一般性,不妨设 D 是包在双圆柱:

$$P^2 = \{z = (z_1,z_2) \in \mathbf{C}^2: |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

之内. 任给 $\delta>0$,可以选取 n 充分大,使得 $n\delta^2>2$. 定义 $h(z_1,z_2)=(z_1+nz_2^2,z_2)$. 若 $h(D)$包有半径为 δ 的球,$|\zeta|<\delta$. 设此球的中心为(α,β),于是在 D 中有点(λ_0,μ_0)及(λ,μ),使得 $h(\lambda_0,\mu_0)=(\alpha,\beta)$以及 $h(\lambda,\mu)=(\alpha,\beta+\zeta)$. 由 h 的定义可知:$\mu-\mu_0=\zeta$, $\mu+\mu_0=2\beta+\zeta$以及 $n(\mu^2-\mu_0^2)=\lambda_0-\lambda$. 于是 $\lambda_0-\lambda=n\zeta(2\beta+\zeta)$. 因之,

$n|\zeta|\cdot|2\beta+\zeta|\leqslant 2$，对$|\zeta|<\delta$中任一点都成立. 从中选取一点$\zeta_0$，使得$|2\beta+\zeta|\geqslant|\zeta|$. 于是可得$n\delta^2\leqslant 2$. 这与$n\delta^2>2$的要求相矛盾. h显然是在$\mathbf{C}^2$上双全纯的，且$h(0)=0$，$J_h(0)=1$. 所以$\mathbf{C}^2$中任意有界域Ω上的双全纯映照

$$h(z):\Omega\to\Omega'\subset\mathbf{C}^2,\ h(0)=0,\ J_h(0)=I,$$

由这样的全纯映照组成的映照族，Bloch 常数B也是不存在的. 从这个例子也可以看出，L、B_0、A也是不存在的. 显然对$\mathbf{C}^n$中任意有界域Ω上的双全纯映照的 Bloch 常数B以及L、B_0、A也同样可证明其不存在.

1986年，Duren 与 Rudin[1,12]也举出了相似的反例：任给$\delta>0$，在$B^2\subset\mathbf{C}^2$上定义

$$f_\delta(z_1,z_2)=\left(z_1,z_2+\left(\frac{z_1}{\delta}\right)^2\right),$$

则$f_\delta(0)=0$，$J_{f_\delta}(0)=I$，而$f_\delta(B^2)$不能包有半径大于δ的球.

从这些反例可以看出：如果希望对 Bloch 常数得出正面的结果，必须对全纯映照加以适当的限制条件.

首先看到这一点的，也许是 Bochner. 不但如此，他也许是第一位讨论高维空间的 Bloch 常数的数学家，他的工作是开创性的.

早在1946年，Bochner 的文章[1,9]是第一篇讨论高维空间 Bloch 常数的文章. 在此文中，他证明了：

定理1.3.1(Bochner,1946)　若$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$在$\mathbf{R}^n$中的单位球$xx'\leqslant 1$中满足：

(1) f的各个分量f_i满足 Laplace 方程：

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2}=0\quad(i=1,\cdots,n);$$

(2) $\det J_f(0)=1$；

(3) $\mathrm{tr}(J_f(x)J_f(x)')\leqslant K|\det J_f(x)|^{\frac{2}{n}}$，

式中K为一个正的常数，“$'$”表示转置，则在单位球中存在一个开集S，f将S一对一地映为$\mathbf{R}^n$中一个以$R_0=R_0(n,K)$为半径的球，式中$R_0(n,K)$表示一个只与n及K有关的正的常数.

也就是说:在条件(1)、(2)及(3)之下,Bloch 常数是存在的.重要的是条件(3),这是对映照 $f(x)$ 的 Jacobian 矩阵 $J_f(x)$ 的一种限制,即 $J_f(x)J_f(x)'$ 的最大特征根与最小特征根之比小于一个正的常数.如果没有这个条件,则如前所示,Bloch 常数是不存在的.例如:若 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$,在 $x_1^2+x_2^2<1$ 上定义映照

$$y=(y_1,y_2)=f_n(x)=\left(nx_1,\frac{1}{n}x_2\right),$$

则 $f_n(x)$ 满足条件(1)与(2),f_n 将单位球映到 $\mathbf{R}^2$ 中的图象中包有圆的最大半径不能超过 $\frac{1}{n}$.这说明如果只要求满足条件(1)与(2),则 Bloch 常数是不存在的.

那么条件(3)有什么意义呢?Bochner 在文中给出了它的几何意义.令

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j,\ \text{式中}\ g_{ij}(x)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\frac{\partial f_m}{\partial x_j}.$$

则条件(3)的意义是椭球 $\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)\xi_i\xi_j=1$ 的最长轴与最短轴之比有一个与 x 无关的上界.若 $\det(g_{ij})=0$ 在某点成立,则在这点所有的 $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(i,m=1,\cdots,n)$ 都等于零.这是共形映照(所有的轴都一样长)的一种推广.这个想法导致后来伍鸿熙(1967)及 Greene-伍鸿熙(1970)在复空间及复流形上引入 K-拟似共形映照的概念.

由于多复变数 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n$ 的全纯映照 $f(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$ 可以看作在 $\mathbf{R}^{2n}$ 上的映照,如果 $f(z)$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球 $z\bar{z}'<1$ 上定义,则 $f(z)$ 当然满足(1).因之,如果 $f(z)$ 也满足(2)与(3),则 Bloch 常数是存在的.所以定理1.3.1(Bochner)也是第一条关于多复变数的 Bloch 常数的定理.由于它的重要性,在此重新叙述如下:

若 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n$,$B=\{z\in\mathbf{C}^n:z\bar{z}'<1\}$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球.若 $f(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$ 为 B^n 上的全纯映照,$|\det J_f(0)|=1$,且

$$\operatorname{tr}(J_f(z)\overline{J_f(z)}') \leqslant K|\det J_f(z)|^{\frac{2}{n}},\quad z\in B, \tag{1.3.4}$$

式中 K 为一个正的常数，则在 B^n 中存在一个开集 Ω，f 将 Ω 双全纯地映为一个半径为 $R=R(n,K)>0$ 的球，即 Bloch 常数存在.

1951年，Takahashi[1.57]将条件(1.3.4)易之以稍为弱一些的条件：

$$\max_{z\bar{z}'\leqslant r^2}\operatorname{tr}(J_f(z)\,\overline{J_f(z)}') \leqslant K\max_{z\bar{z}'\leqslant r^2}|\det J_f(z)|^{\frac{2}{n}},\quad 0<r<1. \tag{1.3.5}$$

并且指出，可以取

$$R(n,K) = \frac{1}{12}(n-1)^{n-2}K^{-2n+1}.$$

但是当 $n=1$ 时，$R(n,K)$为零.

1967年，伍鸿熙发表了一篇重要的文章[1.63]. 在此文中除了前面提到的他举的反例外，还提出了一系列重要的概念与结果. 从他的反例中可观察到：尽管 $f_n(z)$使 $|\det J_{f_n}(0)|=1$成立，但当 $n\to\infty$ 时，$f_n(z)$将 z_1轴的方向无穷增长，而在 z_2轴的方向无穷缩小，这就导致了 Bloch 常数的不存在. 因之他引入了如下的概念：

定义1.3.1(伍鸿熙)　若 $f:U\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为 C^1映照. f 被称为是 K-拟似共形映照(K-quasi conformal mapping)，若下述条件成立：对于任意点 $p\in U$，S_p 是切空间 U_p 的单位球面，若 f_{*p}表示由 f 导出的在 p 点的从切空间到切空间的映照，S_p 在 f_{*p}的象是一个超椭球(Hyperellipsoid)$f_{*p}(S_p)$，$f_{*p}(S_p)$的最长轴的长度与最短轴的长度之比不超过 K.

这个定义是从几何概念出发的，与其等价的分析的意义可以从如下的叙述中看出：

用 $x=(x_1,\cdots,x_n)$和 $y=(y_1,\cdots,y_n)$分别表示 U 和 $\mathbf{R}^n$ 的坐标，$f=(f_1,\cdots,f_n)=(y_1\circ f,\cdots,y_n\circ f)$. 设 $t=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$是 U_p 中的一个单位切向量，于是 $f_{*p}t=\sum_{i,j=1}^n a_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}$. 用$\langle,\rangle$表示 $\mathbf{R}^n$ 中的内积，则

$$\|f_{*p}t\|^2 = \langle f_{*p}t, f_{*p}t\rangle = \sum_{i,j,k} a_i a_j \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

令

$$G = \left(\sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n},\quad a = (a_1,\cdots,a_n),$$

则 $aa'=1$, $\|f_{*p}t\|^2 = aGa'$. 故 $f_{*p}(s_p)$的最长轴的长度就是 G 的最大特征根的平方根;最短轴的长度就是 G 的最小特征根的平方根,于是 f 为一个 K-拟似共形映照,当且仅当

$$\Lambda_f(x) \leqslant K\lambda_f(x) \tag{1.3.6}$$

对所有的 $x\in U$ 都成立,这里 $\Lambda_f(x)$表示 $J_f(x)J_f(x)'$的最大特征根的非负平方根,$\lambda_f(x)$表示 $J_f(x)J_f(x)'$的最小特征根的非负平方根.

容易看出,(1.3.6)成立当且仅当:存在一个正的常数 K_0,使得

$$\operatorname{tr}(J_f(x)J_f(x)') \leqslant K_0(\det J_f(x))^{\frac{2}{n}} \tag{1.3.7}$$

对所有 $x\in U$ 都成立. 这就是 Bochner 定理中的条件(3).

伍鸿熙在文献[1.63]中还给出了一个一般的 Bloch 定理如下:

定理1.3.2(伍鸿熙,1967) 若 $\mathfrak{F}$ 为$\overline{B^n} = \{x=(x_1,\cdots,x_n)\in \mathbf{R}^n, xx'\leqslant 1\}$上的 C^∞映照族,$f\in\mathfrak{F}$, $f:\overline{B^n}\to\mathbf{R}^n$,若 $\mathfrak{F}$ 满足如下的三个条件:

(a) $\mathfrak{F}$ 是 K-拟似共形映照族,即对每一个 $f\in\mathfrak{F}$,(1.3.7)成立;

(b) 每一个 $f\in\mathfrak{F}$,都是定义在$\overline{B^n}$ 上的一个固定的线性次椭圆齐次偏微分方程组(linear hypoelliptjc homogeneous system of PDE) $L(x,D)f=0$ 的解,其中 $L(x,D)=(l_{ij}(x,D))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 中的每个元素 $l_{ij}(x,D)$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$都是线性次椭圆齐次偏微分算子或为零;

(c) 每一个 $f\in\mathfrak{F}$,都有 $|\det J_f(0)|=1$,这里 0 是 B^n 的原点.

则一定存在一个正的常数 $\beta=\beta(L(x,D),n,K)>0$,$\beta$ 只依赖于

$L(x,D)$、n 及 K，使得每一个 $f\in\mathfrak{F}$，$f(\overline{B^n})$都有一个半径为 β 的单叶球. 即 Bloch 常数存在.

取 $L(x,D)=[\Delta,\cdots,\Delta]$，即取为对角线方阵，每个元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的 Laplace 算子 Δ，则这就是 Bochner 定理. 由于全纯映照满足 Cauchy-Riemann 方程组，它是线性强椭圆一次齐次方程组，因之，K-拟似共形全纯映照族满足定理1.3.2(伍鸿熙)的条件. 则存在一个正的常数，只依赖于 n 与 K，使得每一个 K-拟似共形全纯映照有一个以此常数为半径的单叶球，即 Bloch 常数存在. 这时候，将条件(1.3.6)易之以 $\Lambda_f(z)\leqslant K\lambda_f(z)$，这里 $\Lambda_f(z)$与 $\lambda_f(z)$分别是矩阵 $J_f(z)\overline{J_f(z)}'$ 的最大特征根与最小特征根的平方根，条件(1.3.7)易之以(1.3.4). 条件(1.3.5)虽然比(1.3.4)稍弱一些，但(1.3.4)有十分明确的几何意义，而(1.3.5)却不是这样. 满足条件(1.3.5)的全纯映照往往依然称为 K-拟似共形映照.

1973年，Hahn[1.26]讨论了在 $\mathbf{C}^n$ 中单位球 B^n 上的 K-拟似共形全纯映照 f，f 满足条件(1.3.5)且 $|\det J_f(0)|=1$，他证明了：Bloch 常数 B 满足：

$$B\geqslant K^{\frac{1}{n}-1}/4(2K+1).$$

若以 $J_f(0)=I$ 替代 $|\det J_f(0)|=1$，则

$$B\geqslant 1/4(2K+1).$$

当 $n=1$时，$B\geqslant\frac{1}{12}$. 这与 Ahlfors 的结果 $B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$相比较是有差距的.

此外，他还证明了：若用条件 $\max\limits_{z\bar{z}'\leqslant r^2}\Lambda_f(z)\leqslant K$ $(0<r<1)$ 替代(1.3.5)，式中 K 为一个正的常数，则在条件 $|\det J_f(0)|=1$ 或 $J_f(0)=I$ 下，Bloch 常数也是存在的，且给出了 B 的下界的估计.

1977年，Harris[1.29]讨论了复 Banach 空间的全纯映照的 Bloch 常数.

若 X 为复 Banach 空间，$\|\cdot\|$为其范数，X 中的半径为 r 的球记作 $B_r=\{x\in X:\|x\|<r\}$. 若 $\mathfrak{D}$ 为 X 中的开集，函数 $h:\mathfrak{D}\to X$ 称

为是全纯的,若对每一点 $x\in X$,其 Fréchat 导数 $Dh(x)$ 作为 X 上的一个有界复线性映照是存在的.若 $h:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}'$,且反函数 $h^{-1}:\mathfrak{D}'\to\mathfrak{D}$ 是存在的,h 及 h^{-1} 都是全纯的,则称 h 为**双全纯函数**,将 $\mathfrak{D}$ 双全纯地映为 $\mathfrak{D}'$.

关于对复 Banach 空间上的全纯函数,在本书的最后一章中还将讨论它.

定理1.3.3(Harris,1977) 若 B_1 为复 Banach 空间 X 中的单位球,$h:B_1\to X$ 为全纯函数,若 $Dh(0)^{-1}$ 存在,$\|Dh(0)^{-1}\|^{-1}\geqslant 1$,且满足:

i) 当 $0<r<1$ 时,$\sup\limits_{x\in B_r}\|h(x)\|<\infty$;

ii) 对每一点 $x\in B_1$,$Dh(x)^{-1}$ 存在,且 $\inf\limits_{\|y\|\leqslant 1}\|Dh(x)y\|>0$;

iii) 当 $0<r<1$ 时,$\sup\limits_{x\in B_r}\|Dh(x)\|\leqslant K\sup\limits_{x\in B_r}\inf\limits_{\|y\|=1}\|Dh(x)y\|$.

这里 K 为一个正的常数,则 h 将 B_1 中一个子球双全纯地映为一个包有半径大于 $\dfrac{1}{8K}$ 的球的区域.

当 X 为有限维时,iii)相当于条件(1.3.5).当 $X=\mathbf{C}$ 时,这就是 $B\geqslant\dfrac{1}{8}$.

1970年,Greene 和 Wu 在文献[1.24]中将 K-拟似共形映照的概念推广到了 Hermitian 流形.

若 $\left(M,\sum\limits_{i,j=1}^{n}g_{i\bar{j}}\mathrm{d}z_i\mathrm{d}\bar{z}_j\right)$ 与 $\left(N,\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n}h_{\alpha\bar{\beta}}\mathrm{d}w_\alpha\overline{\mathrm{d}w_\beta}\right)$ 是两个具有相同维数 n 的 Hermitian 流形,全纯映照 $f:M\to N$.于是在 M 上可定义一个半定正的 Hermitian 度量:

$$f^*(\mathrm{d}s_N^2)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}f_{\alpha\bar{\beta}}(z)\mathrm{d}z_\alpha\overline{\mathrm{d}z_\beta},$$

这里

$$f_{\alpha\bar{\beta}}(z)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}h_{\mu\bar{\nu}}\frac{\partial w_\mu}{\partial z_\alpha}\overline{\left(\frac{\partial w_\nu}{\partial z_\beta}\right)},\quad w_\alpha=f_\alpha(z).$$

记 $F=(f_{\alpha\bar{\beta}})$, $G=(g_{i\bar{j}})$.在 M 上有两个 Hermitian 度量 $f^*(\mathrm{d}s_N^2)$ 及 $\mathrm{d}s_M^2$,它们之比为

$$\frac{f^*(\mathrm{d}s_N^2)}{\mathrm{d}s_M^2}=\frac{\mathrm{d}zF\,\overline{\mathrm{d}z}'}{\mathrm{d}zG\,\overline{\mathrm{d}z}'}.$$

这里 $\mathrm{d}z=(\mathrm{d}z_1,\cdots,\mathrm{d}z_n)$. 由 G 为定正 Hermitian 矩阵,故可写成 $G=H\overline{H}'$, H 为非异. 如令 $\mathrm{d}\eta=\mathrm{d}zH$,则

$$\frac{f^*(\mathrm{d}s_N^2)}{\mathrm{d}s_M^2}=\frac{\mathrm{d}\eta H^{-1}F\,\overline{H^{-1}}'\,\overline{\mathrm{d}\eta}'}{\mathrm{d}\eta\,\overline{\mathrm{d}\eta}'}.$$

而 $H^{-1}F\,\overline{H^{-1}}'$ 显然仍为一个半定正的 Hermitian 矩阵. 若其最大的特征根为 $Q_f^2(z)$,最小特征根为 $q_f^2(z)$. Greene 和 Wu 定义全纯映照 $f:M\to N$ 为 K-拟似共形映照,若存在一个正的常数 K,使得

$$Q_f(z)\leqslant Kq_f(z) \tag{1.3.8}$$

对每一点 $z\in M$ 都成立.

显然,这样定义的 Hermitian 流形上的 K-拟似共形映照与以前伍鸿熙在文献[1.63]中所定义在 $\mathbf{C}^n$(或 $\mathbf{R}^n$)中区域上的 K-拟似共形映照是一致的.

Greene 和 Wu 证明了:若 $\overline{B}^n$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中闭单位球,取欧氏度量,N 为 n 维 Hermitian 流形. 若 $\overline{B}^n$ 与 N 的体积元素分别为 ω 及 Ω. 若 $f:\overline{B}^n\to N$ 为 K-拟似共形映照,且 $\left(\frac{f^*\Omega}{\omega}\right)(0)\geqslant a>0$. 若 N 为紧的或是 N 的全纯自同构群中包有一个等度可递群,则存在一个正的常数 $\gamma=\gamma(n,a,K,N)$,使得 f 包有一个以 γ 为半径的单叶球,即在 $\overline{B}^n$ 中有一个开集,f 将此开集双全纯地映为 N 中一个以 γ 为半径的球.

1975年,Hahn 在文献[1.27]中将上述结果推广为:若 M、N 为两个有相同维数的 Hermitian 流形,若 $f:M\to N$ 为全纯映照,且(1)$\sup\limits_{z\in M}Q_f(z)\leqslant Q$;(2)在 M 中有一点 z_0,$q_f(z_0)\geqslant q>0$,这里 Q、q 为两个常数. 若 N 为紧的或 N 是齐性且 $\mathrm{d}s_N^2$ 是 N 的全纯自同构群作用下的不变度量,则一定存在一个常数 $\beta=\beta(q,Q)$,使得 f 包有一个以 β 为半径的单叶球,即在 M 中有一个开集,f 将此开集双全纯地映为 N 中一个以 β 为半径的球.

Greene 和 Wu 以及 Hahn 的定理都是存在性定理,并未对球

的半径给出具体的估计.

§1.4 陈省身定理

从上节的讨论中可以看出，由 Bochner、伍鸿熙开始，都是对全纯映照加以 K-拟似共形映照的限制后，可以得到 Bloch 常数的存在性，并对其进行估计. 除此之外，还可以从微分几何的角度，应用 Ahlfors 的微分—几何的方法来讨论 Hermitian 流形上的全纯映照的 Bloch 常数，这是陈省身的工作. 1968年在文献[1.11]中他指出：若 $B^n\subset\mathbf{C}^n$ 为单位球，N 为 n 维 Hermitian 流形，全纯映照 $f:B^n\to N$，当 N 具有一些几何性质，主要是曲率具有一些性质时，则 Bloch 常数是存在的，且给出了下界的估计（事实上，B^n 可以用具有一些曲率性质以及完备的 Kähler 流形来替代之）.

若 $\left(M,\sum_{i,j=1}^{n}g_{i\bar{j}}\mathrm{d}z_i\mathrm{d}\bar{z}_j\right)$ 与 $\left(N,\sum_{i,j=1}^{n}h_{\alpha\bar{\beta}}\mathrm{d}w_\alpha\mathrm{d}\overline{w_\beta}\right)$ 是有相同维数 n 的 Hermitian 流形，$f:M\to N$ 为全纯映照，且 $\det J_f\neq 0$. 令

$$u=\frac{\det(h_{\alpha\bar{\beta}})}{\det(g_{i\bar{j}})}|\det J_f|^2, \qquad (1.4.1)$$

则 u 的几何意义是映照 f 的体积元之比.

若 N 为单连通的，并且其 Riemann 截曲率（sectional curvature）处处 $\leqslant 0$. 若 $r(f)$ 是 f 的象中单叶球的半径的上确界. 若 $\mathfrak{F}$ 为已给的全纯映照族，则称 $B=\inf_{f\in\mathfrak{F}}r(f)$ 为映照族 $\mathfrak{F}$ 的 Bloch 常数. 当 $n=1$ 时，M 为单位圆 Δ，N 为 $\mathbf{C}$ 时，这样定义的 Bloch 常数就是§1.1中的 B.

定理1.4.1（陈省身，1968） 若 N 是 n 维单连通 Hermitian 流形，度量为 ds_N^2，且满足：

(1) 它的 Riemann 截曲率处处 $\leqslant 0$；

(2) 存在一个光滑非增函数 $\lambda(t)>0$ $(0<t<C)$，这里 C 是一个固定的正的常数，使得对每一点 $q_0\in N$，度量 $\lambda(\delta(q_0,q))ds_N^2$ 的 Ricci 曲率 $\leqslant -2(n+1)$，这里 $q\in N$，$\delta(q_0,q)$ 为 N 中两点 q_0 与 q 在

度量 ds_N^2 意义下的距离. 若 B^n 为 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球,其度量为 Bergman 度量. 若全纯映照 $f:B^n\to N$,且 $J_f(z)\neq0$对每一点 $z\in B^n$ 都成立,且在 B^n 中有一点 a,使得由(1.4.1)所定义的 u,在这点等于1. 由这样的全纯映照的全体组成的映照族记作 $\mathfrak{F}$,则 $\mathfrak{F}$ 的 Bloch 常数 $B=\inf r(f)\geqslant C$.

当 $n=1$, $B^1=\Delta$, $N=\mathbf{C}$ 时,这就是 $B_0\geqslant\frac{1}{2}$.

这里将给出一个比定理1.4.1更为一般的定理的证明.

引理1.4.1 若 M 为 n 维完备 Kähler 流形,其截曲率有下界,且纯量曲率(scalar curvature)$\geqslant -K_1$ $(K_1>0)$. N 为 n 维 Hermitian 流形,其 Ricci 曲率$\leqslant -\frac{K_2}{n}$ $(K_2>0)$. 全纯映照 $f:M\to N$,且 $u>0$,则 $u\leqslant\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^n$,这里 u 为由(1.4.1)所定义.

证 在 M 中任取一点 P_0,要证的是:$u(P_0)\leqslant\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^n$. 令 $r(P_0,P)$为 P_0与 $P(\in M)$之间在 M 的度量下的距离. 任给 $a>0$,令 E 为以 P_0为中心,a 为半径(在 M 的度量下)的球:$E=\{P\in M: r(P_0,P)<a\}$. 在 M 上定义函数 $\eta(P)=(a^2-r^2)^2u^{\frac{1}{n}}(P)$. 显然,$\eta$ 在$\overline{E}$上连续,在其上取到最大值. 设在点 P^* 处取到最大值,显然,$\eta(P^*)>0$,及 $\ln\eta(P)$也在 P^* 处取到最大值(由于 $u>0$,故 $\ln\eta$ 有意义). 由极值原理,在点 P^* 处有

$$0\geqslant\Delta\ln\eta=\Delta\ln(a^2-r^2)^2+\Delta\ln u^{\frac{1}{n}}$$

成立,这里 Δ 为 M 上的 Laplace 算子. 由于

$$\frac{1}{2}\Delta\ln u=R-\mathrm{tr}(f^*\mathrm{Ric}),\tag{1.4.2}$$

这里 R 为 M 的纯量曲率, $\mathrm{tr}(f^*\mathrm{Ric})$为 N 的 Ricci 形式的逆象的迹(参阅文献[1.11]).

(1.4.2)也可以写成:

$$\frac{1}{2}\Delta\ln u=R-\sum_{i,j,k,l}S_{k\bar{j}}\frac{\partial w_k}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\overline{w}_j}{\partial\overline{z}_l}g^{l\bar{i}},\tag{1.4.3}$$

这里$(S_{k\bar{j}})$为 N 的 Ricci 张量，$(g^{\bar{l}i})$为矩阵$(g_{i\bar{l}})$的逆矩阵. 由关于 Ricci 曲率的假定可知：

$$\sum_{i,j,k,l} S_{k\bar{j}} \frac{\partial w_k}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \overline{w}_j}{\partial \overline{z}_l} g^{\bar{l}i} \leqslant -\frac{K_2}{n} \sum_{i,j,k,l} h_{k\bar{j}} \frac{\partial w_k}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \overline{w}_j}{\partial \overline{z}_l} g^{\bar{l}i}.$$

令 $G^{-1} = (g^{\bar{l}i})_{1 \leqslant i,l \leqslant n}$，$H = (h_{k\bar{j}})_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ 及 $J_f = \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_i}\right)_{1 \leqslant i,k \leqslant n}$.

由于 G^{-1}是正定 Hermitian 方阵，因之有非异方阵 P，使得 $G^{-1} = \overline{P}' P$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l} h_{k\bar{j}} \frac{\partial w_k}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \overline{w}_j}{\partial \overline{z}_l} g^{\bar{l}i} &= \operatorname{tr}(J_f H \overline{J}'_f G^{-1}) = \operatorname{tr}(J_f H \overline{J}'_f \overline{P}' P) \\ &= \operatorname{tr}(P J_f H \overline{J}'_f \overline{P}') \geqslant n[\det(P J_f H \overline{J}'_f \overline{P}')]^{\frac{1}{n}} \\ &= n\left[\frac{\det H}{\det G} |\det J_f|^2\right]^{\frac{1}{n}} = n u^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

这是因为 $P J_f H \overline{J'_f P'}$是正定的 Hermitian 方阵. 将上式代入(1.4.3)就得到：

$$\frac{1}{2} \Delta \ln u \geqslant R + K_2 u^{\frac{1}{n}}. \qquad (1.4.4)$$

此外，$\Delta \ln (a^2 - r^2)^2 = \dfrac{-2\Delta r^2}{a^2 - r^2} - \dfrac{8r^2}{(a^2 - r^2)^2}$，故有

$$0 \geqslant -\frac{2\Delta r^2}{a^2 - r^2} - \frac{8r^2}{(a^2 - r^2)^2} + \frac{2}{n} R - \frac{2}{n} K_2 u^{\frac{1}{n}}.$$

由于 M 的截曲率有下界，不妨设其下界为$-b^2$，由比较定理（参阅文献[1.62]），有

$$\Delta r^2 \leqslant 2 + 2(n-1) br \coth(br).$$

于是由关于纯量曲率的假设，得到

$$0 \geqslant \frac{2(2 + 2(n-1) br \coth(br))}{a^2 - r^2} - \frac{8r^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{2}{n} K_1 + \frac{2}{n} K_2 u^{\frac{1}{n}}.$$

这就得到

$$(a^2 - r^2)(2 + 2(n-1) br \coth(br)) + 4r^2 + (a^2 - r^2)^2 \frac{K_1}{n}$$

$$\geqslant \frac{K_2}{n}\eta(P^*) \geqslant \frac{K_2}{n}\eta(P_0) = \frac{K_2}{n}a^4u^{\frac{1}{n}}(P_0).$$

由此可得：

$$a^2(2 + 2(n-1)ba\coth(ba)) + 4a^2 + \frac{a^4}{n}K_1 \geqslant \frac{K_2}{n}a^4u^{\frac{1}{n}}(P_0).$$

在上式两端除以 a^4，再令 $a\to\infty$，即得 $u(P_0)\leqslant\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^n$.

引理1.4.2 若 M 为 n 维完备 Kähler 流形，其截曲率有下界，纯量曲率 $\geqslant -K_1(K_1>0)$，N 为 n 维 Hermitian 流形，对每一点 $q_0\in N$，存在一个 Hermitian 度量，它是在 q_0 点的支持度量(supporting metric)，其 Ricci 曲率 $\leqslant -\frac{K_2}{n}(K_2>0)$. 全纯映照 f：$M\to N$，且 $u>0$，则 $u\leqslant\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^n$ 对 M 中的每一点都成立.

证 N 的度量为 $\sum h_{\alpha\beta}\mathrm{d}w_\alpha\overline{\mathrm{d}w_\beta}$. 如引理1.4.1中那样定义 E 及 $\overline{E}$ 上的连续函数 $\eta=(a^2-r^2)^2u^{\frac{1}{n}}$，且在 $P^*\in\overline{E}$ 点处取最大值。若 $\sum\lambda(f(P^*),f(P))h_{\alpha\beta}\mathrm{d}w_\alpha\overline{\mathrm{d}w_\beta}$ 是 N 在点 $f(P^*)$ 处的支持度量. 由支持度量的定义，有

$$\lambda(f(P^*),f(P^*))=1,\quad \lambda(f(P^*),f(P))\leqslant 1.$$

在 P^* 的邻域中定义

$$\tilde{\eta} = (a^2-r^2)^2\lambda(f(P^*),f(P))u^{\frac{1}{n}}(P),$$

则 $\tilde{\eta}$ 也在 P^* 处取最大值，显然，$\tilde{\eta}(P^*)>0$. 故 $\ln\tilde{\eta}(P)$ 也在 P^* 点处取最大值.(由于 $u>0$，故 $\ln\tilde{\eta}$ 有意义)，由极值原理，在点 P^* 处有

$$0\geqslant\Delta\ln\tilde{\eta} = \Delta\ln(a^2-r^2)^2 + \Delta\ln(\lambda u^{\frac{1}{n}}).$$

而 $\lambda^n u$ 就是度量 $\mathrm{d}s_N^{*2} = \sum\lambda h_{\alpha\beta}\mathrm{d}w_\alpha\overline{\mathrm{d}w_\beta}$ 对映照 f 而言的体积元素的比，故也有

$$\frac{1}{2}\Delta\ln(\lambda^n u) = R - \sum_{i,j,k,l}\tilde{S}_{kj}\frac{\partial w_k}{\partial z_i}\cdot\overline{\frac{\partial w_j}{\partial z_l}}g^{li},$$

这里 R 和 (g^{li}) 的意义如引理1.4.1所述，$\tilde{S}_{kj}$ 为 N 相对于度量

ds_N^{*2} 而言的 Ricci 张量. 于是在引理1.4.1证明过程中的(1.4.3)以下的推导都可以搬到这里来,(1.4.4)式成为

$$(a^2 - r^2)(2 + 2(n-1)br\coth(br)) + 4r^2 + (a^2 - r^2)^2 \frac{K_1}{n}$$

$$\geqslant \frac{K_2}{n} \widetilde{\eta}(P^*) = \frac{K_2}{n}\eta(P^*) \geqslant K_2\eta(P_0) = \frac{K_2}{n}a^4u^{\frac{1}{n}}(P_0),$$

即得 $u\leqslant\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^n$ 对任一点 $P\in M$ 都成立.

有了这些准备之后即可证定理1.4.2.

定理1.4.2 若 N 是 n 维 Hermitian 流形,度量为 ds_N^2,且存在一个光滑非增函数 $\lambda(t)>1$ $(0<t<c)$,这里 C 为一个固定的常数,使得在每一点 $q_0\in N$,度量 $\lambda(\delta(q_0,q))ds_N^2$ 的 Ricci 曲率$\leqslant -\frac{K_2}{n}$,$K_2>0$,这里 $q\in N$,$\delta(q_0,q)$为 N 中的两点 q_0与 q 在度量 ds_N^2 意义下的距离. 若 M 是 n 维完备 Kähler 流形,其截曲率有下界,纯量曲率$\geqslant -K_1$, $K_1>0$, $K_1\leqslant K_2$. 若

$$\mathfrak{F}=\{f:M\to N: f \text{ 为 } M \text{ 上的全纯映照}, \det J_f \text{ 在 } M \text{ 上处处不为零,在 } M \text{ 中有一点 } a, u(a)=1\},$$

则 $B=\inf\limits_{f\in\mathfrak{F}} r(f)\geqslant C$,$r(f)$ 已在前面有定义.

证 若定理不成立,则对每一个 $f\in\mathfrak{F}$, $r(f)<C$. 对每一点 $q\in N$,记 $r(q,f)$为 f 中以 q 为中心的最大单叶球的半径,则$0<r(q,f)\leqslant r(f)<C$, $r(q,f)$ 是 N 中的连续函数. 考虑度量

$$ds_N^{*2} = \lambda(r(q,f))ds_N^2.$$

设 V 是以 q_0为中心的最大半径的单叶球,则在 ∂V 上一定有一个奇点 m,考虑度量

$$d\sigma_N^2 = \lambda(\delta(m,q))ds_N^2 = \frac{\lambda(\delta(m,q))}{\lambda(r(q,f))}ds_N^{*2},\ q\in N,$$

在 V 中的每一点都有 $\delta(m,q)\geqslant r(q,f)$,当 $q=q_0$ 时等号成立,所以 $\frac{\lambda(\delta(m,q))}{\lambda(r(q,f))}\leqslant 1$ 对 V 中每一点 q 都成立,而当 $q=q_0$时,等号成立. 所以 $d\sigma_N^2$ 是 ds_N^{*2} 的支持度量. 由假设 $d\sigma_N^2$ 的 Ricci 曲率$\leqslant$

$-K_2/n$,由 ds_N^{*2} 对映照 f 而言的体积元素之比为

$$\lambda^n(\delta(m,q))u(q) \leqslant \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^n, \quad q \in M.$$

取 $q=q_0$,则有

$$\lambda^n(r(q_0,f))u(q_0) \leqslant \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^n,$$

不妨取 $q_0=a$,则有

$$\lambda^n(r(a,f)) \leqslant \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^n.$$

由于 $K_1 \leqslant K_2$,故 $\lambda(r(a,f)) \leqslant \frac{K_1}{K_2} \leqslant 1$. 但另一方面,$0<r(a,f)<C$,由 λ 的定义 $\lambda(r(a,f))>1$,就得到矛盾,故定理1.4.2成立.

在定理1.4.2中取 $M=B^n$,且取 Bergman 度量,同时取 $K_2=2n(n+1)$,则即得定理1.4.1.

从这个定理的证明中可以看出,其证明的方法与§1.2中证明 Ahlfors 定理的方法是一脉相承的,是 Ahlfors 的微分—几何方法的发展.

可以看出:我们证明定理1.4.2的过程与定理1.4.1的原有的证明也是略有一点不同的.

最后证明:当 $n=1, M=\Delta, N=\mathbf{C}$,则定理1.4.2就是 $B_0 \geqslant \frac{1}{2}$.

在 $\mathbf{C}$ 中取欧氏度量,即 $ds_N^2 = dz\,\overline{dz}$. 当 λ 满足

$$\Delta \log \lambda \geqslant 4\lambda^2 \tag{1.4.5}$$

时,度量 $\lambda dz\,\overline{dz}$ 的 Gauss 曲率 $\leqslant -4$(参阅文献[1.17]第五章). 令

$$\lambda(r) = \frac{1}{2} p A r^{\frac{p}{2}-1}(A^2 - r^p)^{-1},$$

式中 $r=|z|$,p、A 为正的常数,则 $\lambda(r)$ 使(1.4.5)中的等号成立. 当 $r^p \leqslant \frac{(2-p)A^2}{2+p}$ 时,$\lambda(r)$ 为 r 的非增函数,当 $r^p < \frac{(2-p)A^2}{2+p}$ 时,$\lambda(r)$ 为 r 的严格减函数. 取

$$A = 2^{-p}(2+p)^{\frac{2+p}{4}}(2-p)^{-\frac{(2-p)}{4}},$$

当 $p<2$ 时,定义 $r_0^p = \frac{2-p}{2+p}A^2$,于是 $\lambda(r_0)=1$. 因之,当 $0<r<r_0$

时 $\lambda(r)>1$. 由陈省身定理(定理1.4.1)得到

$$\inf_{f\in\mathfrak{F}} r(f) \geqslant r_0 = \frac{1}{4}(4-p^2)^{\frac{1}{2}},$$

令 $p\to 0$,即得到 $B_0\geqslant\frac{1}{2}$.

§1.5 Bloch 全纯映照族

在上一节中已经看到:若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为域,$f:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为全纯映照,且

$$f(0)=0,\ |\det J_f(0)|=1,\ 或\, J_f(0)=I,$$

则由这样的映照所组成的映照族,其 Bloch 常数是不存在的. 为此,Bochner、伍鸿熙等对 J_f 的特征根加以适当的限制,引入了 K-拟似共形映照的概念,在这种限制下,Bloch 常数是存在的,并可对其上、下界进行估计. 陈省身从微分几何的角度出发,考虑一些全纯映照族,当其中的全纯映照 f 的定义域及映象域具有一些几何性质,主要是曲率具有一些性质时,则 Bloch 常数是存在的,且对其下界进行了估计. 现在从变换群的角度来对域 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上的全纯映照的 Bloch 常数进行讨论.

回顾§1.1及§1.2中讨论 $\mathbf{C}$ 中单位圆 Δ 上的全纯函数的 Bloch 常数 B 时,就已经指出:对 B 的研究只要在函数族 $\mathfrak{B}$ 上进行即可,而 Landau 定理(定理1.1.3)进一步指出:只要在 $\mathfrak{B}_1$ 上进行即可. 这些结果的得到是应用了 Δ 的全纯自同构群. $\mathfrak{B}$ 的定义为:

$f\in\mathfrak{B}$ 当且仅当 $\|f\|=\sup\{(1-|z|^2)|f'(z)|:z\in\Delta\}<\infty$,

$\mathfrak{B}$ 称为 Bloch 全纯函数族. 显然 $\|\cdot\|$ 是一个半范数(semi-norm). 但若将 $\mathfrak{B}$ 中任意两个相差只是一个常数的全纯函数看作同一个函数时,在这个意义下,$\|\cdot\|$ 就成为一个范数(norm),且 $\mathfrak{B}$ 在这个范数下成为 Banach 空间,$\mathfrak{B}_1$ 是 $\mathfrak{B}$ 的子族:

$$\mathfrak{B}_1=\{f\in\mathfrak{B}:\|f\|=1,f'(0)=1,f(0)=0\}.$$

Bloch 函数族 $\mathfrak{B}$ 是单复变数函数论中极为重要的一个函数

族,有大量的文献讨论了这个函数族,例如见文献[1.3]、[1.52]以及[1.55]等等.在这里不再作详细的论述了.

对多复变数的全纯映照,也可以作同样的考虑.若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为域,为了方便起见,不妨先设 Ω 为有界齐性域, $0\in\Omega$, $\mathrm{Aut}\Omega$ 表示 Ω 的全纯自同构群.若全纯映照

$$F(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z)):\Omega\to\mathbf{C}^n,\ z=(z_1,\cdots,z_n)\in\Omega,$$

且 $F(0)=0$, $|\det J_F(0)|=1$(或 $J_F(0)=I$).

若 $\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega$,且 $J_{F\cdot\varphi}(0)$ 非异,作

$$g_\varphi(z)=[F(\varphi(z))-F(\varphi(0))](J_{F\cdot\varphi}(0))^{-1},$$

则 $g_\varphi(z)$ 也是 Ω 上的全纯映照,且

$$g_\varphi(0)=0,\ |\det J_{g_\varphi}(0)|=1\quad(\text{或 } J_g(0)=I).$$

$J_{F\cdot\varphi}(0)$ 可分解为 $U\Lambda V$,这里 U 和 V 是 n 阶酉方阵, $\Lambda=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$ 为对角阵, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为非负实数.如果由(1.3.2)所定义的 $r(F)>0$,那么 $r(g_\varphi)\leqslant\frac{1}{\Lambda_\varphi}r(F)$,这里 $\Lambda_\varphi=\max\limits_j|\lambda_j|$.因之,若

$$\sup(\Lambda_\varphi:\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega)=\infty,$$

则全纯映照族 $\{g_\varphi(z):\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega\}$ 的 Bloch 常数不存在,除非 $r(f)=\infty$.因之,对于在 Ω 上的全纯映照 $F(z)$, $F(0)=0$, $|\det J_F(0)|=1$(或 $J_F(0)=I$),且 $\sup\{\Lambda_\varphi:\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega\}=\infty$ 的这种映照所组成的映照可不必讨论,而只需讨论 $\sup\{\Lambda_\varphi:\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega\}<\infty$ 的那种映照族即可.于是有如下定义:

定义1.5.1　若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为有界齐性域, $0\in\Omega$, $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\Omega$, $\mathrm{Aut}\Omega$ 为 Ω 的全纯自同构群; $F(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$ 为 Ω 上的全纯映照, $F:\Omega\to\mathbf{C}^n$,若

$$\|F\|_B=\sup\{\|J_{F\circ\varphi}(0)\|_M:\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega\}<\infty,\qquad(1.5.1)$$

则称 F 为 Ω 上的 Bloch 全纯映照,这里 $\|A\|_M=\max\{|uA|:u\bar{u}'=1\}$ 为矩阵 A 的常规范数.由这些映照的全体组成的全纯映照族称为 Bloch 全纯映照族,记作 $\mathfrak{B}$.

显然, $\|\cdot\|_B$ 是一个半范数,但是若将 $\mathfrak{B}$ 中任意两个相差只是一个常数向量的全纯映照看作同一个映照,则容易看出 $\|\cdot\|_B$ 是

一个范数，且 $\mathfrak{B}$ 在范数 $\|\cdot\|_B$ 的意义下成为 Banach 空间.

当 $n=1, \Omega=\Delta$，则这里定义的 $\|\cdot\|_B$ 与 $\mathfrak{B}$ 是与(1.1.5)及§1.1 中定义的 $\mathfrak{B}$ 是相一致的.

定义1.5.2 若 $D\subset\mathbf{C}^n$ 为域(不一定是有界齐性域)，$\mathfrak{F}$ 为 D 上的全纯映照族的一个子族，$\mathfrak{F}$ 称为*正规族*(normal family)或*有限正规族*(finite normal family)，若 $\mathfrak{F}$ 的每一个序列都有子序列在 D 的任意紧致子集上一致收敛.

于是有如下定理：

定理1.5.1 若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为有界齐性域，$0\in\Omega$，$z=(z_1,\cdots,z_n)\in\Omega$，$\mathrm{Aut}\Omega$ 为 Ω 的全纯自同构群. $F(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$ 为 Ω 上的全纯映照，$F:\Omega\to\mathbf{C}^n$，则 $F\in\mathfrak{B}$ 当且仅当

$$\mathfrak{F}_F=\{g(z)=F(\varphi(z))-F(\varphi(0)):\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega\} \qquad (1.5.2)$$

是一个正规族.

证 若 $\mathfrak{F}_F$ 是一个正规族，于是对任一个 $g\in\mathfrak{F}_F, g(0)=0$，则

$$\{\|J_{F\cdot\varphi}(0)\|_M:\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega\}=\{\|J_g(0)\|_M:g\in\mathfrak{F}_F\}$$

是有界的，故 $F\in\mathfrak{B}$.

反之，若 $F\in\mathfrak{B}$，则对任意 $\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega$，有

$$J_{F\cdot\varphi}(z)=J_{F\cdot\varphi\cdot\varphi_z}(0)(J_{\varphi_z}(0))^{-1},$$

这里 $\varphi_z(z)=0$，$\varphi_z(0)=z$. 于是

$$\|J_{F\cdot\varphi}(z)\|_M\leqslant\|F\|_B\|J_{\varphi_z}(0)\|_M^{-1}.$$

$\|J_{\varphi_z}(0)\|_M^{-1}$ 在 Ω 中任一紧致子集上一致有界. 因此，$\|J_{F\cdot\varphi}(z)\|_M$ 在 Ω 中任一紧致子集上一致有界. 故 $\mathfrak{F}_F$ 是一个正规族. 由此还可以得到 $\|J_F(z)\|_M$ 的上界估计(参阅§1.7).

由于定理1.5.1，可以定义有界齐性域 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 上的全纯映照 F 为 Bloch 全纯映照，如果 $\mathfrak{F}_F$(由(1.5.2)所定义)为正规族.

在伍鸿熙的文章[1.63]中定义了十分一般的正规族的概念，并作了系统的讨论.

若 M、N 为两个满足第二可数公理的连通复流形，连续映照 $f:M\to N$ 的全体组成函数族 $C(M,N)$. 若 $\mathfrak{F}$ 为 $C(M,N)$ 中的一个子族，$\mathfrak{F}$ 称为是*正规族*，若 $\mathfrak{F}$ 中有子集在 $C(M,N)$ 中相对紧(rela-

tive compact)或紧发散(compactly divergent),这里相对紧和紧发散定义为:X 中的一个集合称为相对紧,若其紧闭包在 X 中;序列 $\{f_i\}\subseteq C(M,N)$ 中称为紧发散,若对 M 中每一个紧集 K 和 N 中紧集 K',总有 i_0,使得当 $i\geqslant i_0$ 时,$f_i(K)\cap K'=\varnothing$.

定义1.5.2只是上述定义的一个特例.

以上是关于 Bloch 全纯映照的定义.同样也可以定义 Bloch 全纯函数.

最早在有界齐性域上定义 Bloch 全纯函数的是 Hahn 在1975年的文章[1.27].

若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 是有界齐性域.全纯函数 $f:\Omega\to\mathbf{C}$ 在 Ω 中取 Bergman 度量,在 $\mathbf{C}$ 中取欧氏度量,则得到在§1.3中所定义的 $Q_f(z)$.若

$$\sup_{z\in\Omega}\{Q_f(z):z\in\Omega\}<\infty, \tag{1.5.3}$$

则称 f 为 Ω 上的 Bloch 函数.由这种函数的全体组成的函数族称为 Bloch 全纯函数族,记作 $\mathfrak{B}_f$.

这个定义当 $n=1$,$\Omega=\Delta$ 时,$\mathfrak{B}_f$ 与§1.1中的 $\mathfrak{B}$ 是相一致的.

1980年,Timoney[1.58],[1.59]对有界齐性域上的 Bloch 函数族进行了系统地研究.例如:他证明了一系列相互等价的 Bloch 函数的定义,其中包括:f 为 Bloch 函数当且仅当

$$\mathfrak{F}=\{f(\varphi(z))-f(\varphi(0)):\varphi\in\mathrm{Aut}\Omega\}$$

成为一个正规族.这里正规族的定义是与一个复变数的全纯函数族是正规族的定义一样的.

Hahn 对 Bloch 函数的定义一样可以用来定义 Bloch 映照.

若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 是有界齐性域,全纯映照 $F:\Omega\to\mathbf{C}^n$,在 Ω 中取 Bergman 度量,在 $\mathbf{C}^n$ 中取欧氏度量,则可得到在§1.3中所定义的 $Q_F(z)$.若

$$\sup_{z\in\Omega}\{Q_F(z):z\in\Omega\}<\infty, \tag{1.5.4}$$

则称 F 为 Ω 上的 Bloch 映照.由这种映照的全体组成的映照族称为 Bloch 全纯映照族,记作 $\mathfrak{B}_F$.

由 Q_F 的定义及 Bergman 度量在全纯自同构群下是不变度量. 因此,立刻可以看出:上述的定义与定义1.5.1是相互等价的.

同样容易看出:若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为有界齐性域,全纯映照 $F(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$ 为 Ω 上的 Bloch 映照,当且仅当每一个 f_i $(i=1,\cdots,n)$ 都是 Ω 上的 Bloch 全纯函数.

1992年刘向阳[1.40]给出了当 $\Omega=B^n$ 时的 Bloch 映照的定义,1994年,FitzGerald 与龚昇[1.14]给出了有界齐性域上的 Bloch 映照的定义1.5.1,并证明了定理1.5.1.

1988年,Krantz 与马大维[1.36]定义了 $\mathbf{C}^n$ 中的强拟凸域上的 Bloch 函数. 他们指出:此时用 Kobayashi 度量来替代 Bergman 度量更为方便. 在强拟凸域的情形,用 Bergman 度量、Kobayashi 度量或 Carathéodory 度量来定义 Bloch 函数族 $\mathfrak{B}$ 所得到的实质上是一致的(对有界齐性域来讲,也是如此). 他们的定义是:

若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为强拟凸域,全纯函数 $f:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 称为是 Bloch 函数,如果对每一点 $z\in\Omega$, $\xi\in T_z(\Omega)$,

$$|f_*(z)\cdot\xi|\leqslant CF_k(z,\xi)$$

成立,这里 C 为正的常数, $T_z(\Omega)$ 为 Ω 在 z 点的切空间, $f_*(z)$ 为由 f 导出的 $T_z(\Omega)$ 到 $T_{f(z)}(\mathbf{C})$ 的映照, $F_k(z,\xi)$ 为在点 z,方向为 ξ 的 Ω 的 Kobayashi 度量的无穷小形式,即

$$F_k(z,\xi)=\inf\left\{\frac{\|\xi\|}{\|f'(0)\|}:f:\Delta\to\Omega\text{ 是全纯},f(0)=z,\right.$$
$$\left.f'(0)\text{ 是 }\xi\text{ 乘以正数}\right\},$$

这里 Δ 为 $\mathbf{C}$ 中单位圆, $\|\cdot\|$ 为欧氏距离.

他们也给出了一大批 Bloch 函数相互等价的定义.

现在回过来讨论有界对称域上的全纯映照:

若 $K_\Omega(z,\bar{\xi})$ 是有界齐性域 Ω 的 Bergman 核函数, $0\in\Omega$, F: $\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为 Ω 上的全纯映照,定义泛函:

$$\mathrm{d}(F)=\sup_{z\in\Omega}\frac{|\det J_F(z)|}{\sqrt{K_\Omega(z,\bar{z})/K_\Omega(0,0)}}.\qquad(1.5.5)$$

在单复变数时，当 Ω 为单位圆时，$\mathrm{d}(F)$就是通常的 Bloch 半范数(1.1.5)．但是在高维的情形，若 F、G 为 $\Omega\to\mathbf{C}^n$ 的两个全纯映照，一般来说，

$$\mathrm{d}(F+G)\leqslant \mathrm{d}(F)+\mathrm{d}(G)$$

不再成立．故这个泛函不再有半范数的性质．

但是 $\mathrm{d}(F)$有如下的不变性质：

$$\mathrm{d}(F\circ\varphi)=\mathrm{d}(F)$$

对任意 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega)$都成立．这可证明如下：
易知

$$\left|\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2=\frac{K_\Omega(z,\bar{z})}{K_\Omega(\varphi(z),\overline{\varphi(z)})},\tag{1.5.6}$$

这里 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=J_\varphi$．于是

$$\mathrm{d}(F)=\sup\{|\det(F\circ\varphi)'(0)|:\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega)\},$$

这就立即导出

$$\mathrm{d}(F\circ\varphi)=\mathrm{d}(F).$$

尽管 $n=1,\Omega=\Delta$ 时，$\mathrm{d}(F)=\|F\|_B$，一般来说，当 $n\geqslant 2$时，$\mathrm{d}(F)\neq\|F\|_B$，但容易证明

$$(\mathrm{d}(F))^{\frac{1}{n}}\leqslant\|F\|_B.$$

若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界齐性域，且包含原点，令 $H(\Omega)$表示 Ω 上将 Ω 映到 $\mathbf{C}^n$ 中全纯映照的全体组成的族．

若 $\mathfrak{F}$ 为 $H(\Omega)$的子族，对 $F\in\mathfrak{F},a\in\Omega$，记 $r(a,F)$为最大非负数 r，使得在 Ω 中有一个单连通域 $R,a\in R\subset\Omega$，F 将 R 双全纯地映为球 $B(F(a),r)$，即以 $F(a)$为中心，r 为半径的球．对于固定的 F 及固定的 a，这样的非负数 $r(a,F)$ 当然是存在的．令

$$r(F)=\sup\{r(a,F):a\in\Omega\}.$$

于是定义 Ω 上全纯映照族 $\mathfrak{F}$ 的 Bloch 常数 $B_{\mathfrak{F}}$ 为

$$B_{\mathfrak{F}}=\inf\left\{r(F):F\in\mathfrak{F},\det\frac{\partial F}{\partial z}(0)=1\right\}.$$

在以下各节中所讨论的 Ω 上的全纯映照子族有以下几个：

$\mathfrak{B}=\{F\in H(\Omega):\det\frac{\partial F}{\partial z}(0)=1,\|F\|_B<\infty\}$;

$\mathfrak{B}_K=\{F\in\mathfrak{B}:\|F\|_B\leqslant K\},1\leqslant K<\infty$;

$\mathfrak{B}_{K1}=\{F\in\mathfrak{B}_K:\mathrm{d}(F)=1\}$.

分别以 B、B_K、B_{K1}表示全纯映照族 $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{B}_K$、$\mathfrak{B}_{K1}$的 Bloch 常数.

下面证明相应的 Landau 定理,为此先证如下引理:

引理1.5.1 若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界齐性域,对任一 $F\in\mathfrak{B}_K$,在 $\mathfrak{B}_{K1}$ 中一定存在 G,使得 $r(F)\geqslant r(G)$.

证 若 $\mathrm{d}(F)=1$,则无须证明.若不然,则可在 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 中选择 φ_m,使得

$$1<\mathrm{d}_m=|\det(F\circ\varphi_m)'(0)|$$

趋于 $\mathrm{d}(F)$.令

$$G_m(z)=\frac{(F\circ\varphi_m)(z)-(F\circ\varphi_m)(0)}{\mathrm{d}_m^{1/n}},$$

则 $G_m(0)=0,\det G_m'(0)=1$,而 $\|G_m\|_B\leqslant\|F\|_B\leqslant K$ 对所有的 m 都成立.由于 $\mathrm{d}_m>1$,所以 $r(G_m)\leqslant r(F)$对所有的 m 都成立.但 F 为 Bloch 映照,故$\{G_m\}$是正规族.于是 G_m 中有子族趋向于 G,而 $G(0)=0$, $\det G'(0)=1$, $\|G\|_B\leqslant K$ 以及 $r(G)\leqslant r(F)$.

于是可证明如下 Landau 型定理[1,14]:

定理1.5.2 若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界齐性域,则在 $\mathfrak{B}_{K1}$中存在 F,使得 $r(F)=B_K$.若 $\mathfrak{B}_K$ 非空,则 $B_K>0$.

证 在 $\mathfrak{B}_K$ 中取 F_m,使得

$$r(F_m)\leqslant B_K+\frac{1}{m}.$$

于是由引理1.5.1,在 $\mathfrak{B}_{K1}$中存在 G_m,使得

$$r(G_m)\leqslant r(F_m)\leqslant B_K+\frac{1}{m}.$$

因此,$r(G_m)$趋于 B_K.而$\{G_m-G_m(0)\}$为正规族,于是有子族趋于 F.这样的 F 有 $r(F)=B_K$.

此外,还需要如下的引理:

引理1.5.2 若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界齐性域,F 为 Ω 上将 Ω 映到 $\mathbf{C}^n$

中的全纯映照. G 为 Ω 中的开集, $a\in G$. 如果 F 将 G 双全纯地映为 $B(F(a),r(a,F))$，则或是 G 与 Ω 有共同边界点，或是在球 $B(F(a),r(a,F))$ 的边界上有点 $F(z_0)$，而 $\det F'(z_0)=0$. 因之，$r(a,F)$ 的值或是等于 $F(a)$ 到 $F(\Omega)$ 的边界的欧氏距离，或是等于 $F(a)$ 到 $F(z_0)$ 的欧氏距离.

证　若 Ω 与 G 无公共边界点，则在 Ω 中有开子集 $\{G_m\}$，使得

$$G_m\supset\overline{G},\ G_m\supset\overline{G}_{m+1},\ 而\ \bigcap_{m=1}^{\infty}G_m=\overline{G}.$$

由 $B(F(a),r(a,F))$ 的定义，可在 G_m 中找到点 z_m 及 z'_m，$z_m\neq z'_m$，而 $F(z_m)=F(z'_m)$. 若 $z_m\to z_0\in\partial G$，$z'_m\to z'_0\in\partial G$，则 $F(z_0)$ 与 $F(z'_0)$ 均在 $B(F(a),r(a,F))$ 的边界上. 而 $F(z_0)=F(z'_0)$.

若 $z_0=z'_0$，则 $\det F'(z_0)=0$. 否则，如果 $\det F'(z_0)\neq 0$，则 $F(z)$ 在 z_0 点附近是局部双全纯. 即在 z_0 存在一个邻域，$F(z)$ 为双全纯的. 但当 m 充分大时，有 z_m、z'_m 落在这个邻域中，而 $f(z_m)=f(z'_m)$. 这就导致矛盾.

若 $z_0\neq z'_0$，且 $\det F'(z_0)\neq 0$，$\det F'(z'_0)\neq 0$. 于是 F 在 z_0 及 z'_0 点附近均为局部双全纯. 即有 z_0 的邻域 $N(z_0)$，z'_0 的邻域 $N(z'_0)$，F 为双全纯. F 将 $N(z_0)$、$N(z'_0)$ 映为 $F(N(z_0))$、$F(N(z'_0))$，由于 $F(z_0)=F(z'_0)$，故 $F(N(z_0))\cap F(N(z'_0))$ 为非空开集. 在这非空开集中可以有 $F(z_m)=F(z'_m)$，而 z_m、$z'_m\in N(z_0)$，z_m、$z'_m\in N(z'_0)$. 这与 F 在 $N(z_0)$ 及 $N(z'_0)$ 上双全纯的性质相矛盾.

§1.6　完全圆型域上的几个不等式

$\mathbf{C}^n$ 中的域 Ω 称为圆型的(circular)，若 $z\in\Omega$ 导出 $e^{i\theta}z\in\Omega$ 对所有实数 θ 都成立. 圆型域 Ω 称为完全圆型域(complete circular)，若 $z\in\Omega$ 导出 $re^{i\theta}z\in\Omega$，这里 $0\leqslant r\leqslant 1$，θ 为任意实数.

记 D 为 $\mathbf{C}$ 中的单位圆. 下面这个定理是 Minda[1.44] 定理的推广，Minda 证明了 Ω 为 D 的情形，下面的定理将它推广到有界完全圆型域(见文献[1.14])，证明的方法也是相同的.

定理1.6.1 若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界完全圆型域，点 $a\in\partial\Omega$. 若 g 为在 $\Omega\cup\{a\}$ 上的全纯函数. 将 $\Omega\cup\{a\}$ 映到 $\mathbf{C}$ 中，并且 $|g(w)|\leqslant|g(a)|$ 对所有的 $z\in D$, $w=za$ 都成立，则

$$c=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}w}(a)\cdot a'/g(a) \tag{1.6.1}$$

是正的，且对任意的 $t\in(-1,1)$，有不等式

$$\Re e\left\{\frac{g(ta)}{g(a)}\right\}\geqslant\frac{(c+1)t-(c-1)}{(c+1)-(c-1)t} \tag{1.6.2}$$

成立，

为证明上述定理，要用到如下的 Julia 引理：

引理1.6.1 若 w 为 $D\cup\{1\}$ 上的全纯函数，将 D 映到 D 内，并且 $w(1)=1$. 于是 $w'(1)=c>0$，且对任意的 $r>0$，函数 w 将 $\overline{\Delta}(1,r)$ 映入到 $\overline{\Delta}(1,cr)$ 中，这里 $\Delta(1,r)$ 为表圆(horodisk)：

$$\Delta(1,r)=\left\{z\in D,\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}<r\right\}=D\left(\frac{1}{1+r},\frac{r}{1+r}\right), \tag{1.6.3}$$

而 $D\left(\frac{1}{1+r},\frac{r}{1+r}\right)$ 表示一个以 $\frac{1}{1+r}$ 为中心，$\frac{r}{1+r}$ 为半径的圆，即 D 中一个与 D 相切于 $z=1$ 的圆，$r\in(0,\infty)$，$\overline{\Delta}(1,r)$ 为 $\Delta(1,r)$ 在 D 中的闭包. $\overline{\Delta}(1,r)$ 的一个边界点映到 $\overline{\Delta}(1,cr)$ 上的一个边界点，当且仅当 w 为 D 的全纯自同构，且将 $z=1$ 映到 $z=1$.

下面证明定理1.6.1.

令 $h(z)=g(za)/g(a)$，$z\in D$，则 $h(z)$ 在 $D\cup\{1\}$ 上是全纯的，且由定理的假设，可得到 $h(D)\subset D$，$h(1)=1$ 及 $c=\left.\frac{\mathrm{d}h(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=1}=h'(1)$. 由 Julia 引理，$h'(1)>0$，故(1.6.1)所定义的 c 是正的.

由于 $c>0$，故 $\frac{c-1}{c+1}<1$. 令

$$U(z)=\left(z-\frac{c-1}{c+1}\right)\left(1-\frac{c-1}{c+1}z\right)^{-1}=\frac{(c+1)z-(c-1)}{(c+1)-(c-1)z}, \tag{1.6.4}$$

于是 $U(z)$ 为 D 的一个全纯自同构，且 $U(1)=1$，及 $U'(1)=1$. 要

证明(1.6.2),只需证明:

$$\Re e h(t) \geqslant U(t),\ t \in (-1,1).$$

令 $k=U^{-1}\circ h$,则 k 在 $D\cup\{1\}$ 上全纯,$k(D)\subset D$,$k(1)=1$ 及 $k'(1)=1$. 由引理1.6.1(Julia 引理),即得到

$$\frac{|1-k(z)|^2}{1-|k(z)|^2} \leqslant \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2},$$

在点 $z\in D$ 上等号成立,当且仅当 $k=R_b$,$b\in\mathbf{R}$,而

$$R_b(z)=\frac{(1+z)-(1+ib)(1-z)}{(1+z)+(1-ib)(1-z)},$$

这里 R_b 为 D 的全纯自同构,且将 $z=1$ 映为自身,将 $\Delta(1,r)$ 映为自身. 于是,或是 $k=R_b$ 对某个 $b\in\mathbf{R}$ 成立,或是 $k(\overline{\Delta(1,r)}\backslash\{1\})\subset\Delta(1,r)$ 对所有的 $r\in(0,\infty)$ 都成立. 也就是说:或是 $h=U\circ R_b$ 对某个 $b\in\mathbf{R}$ 成立,或是 $h(\overline{\Delta(1,r)}\backslash\{1\})\subset U(\Delta(1,r))$ 对所有的 $r\in(0,\infty)$ 都成立.

任给 $t\in(-1,1)$,则 $r=\frac{1-t}{1+t}\in(0,\infty)$,$D$ 中的表圆(horodisk)$\Delta(1,r)$,其边界与实数轴交于 t 及1. 由于 $h(\Delta(1,r))\subset U(\Delta(1,r))$,故有 $\Re e h(t)\geqslant U(t)$ 对所有的 $t\in(-1,1)$ 都成立,在某个 t 处上式等号成立,当且仅当 $\mathrm{Im}\,h(t)=0$,$h(t)=U(t)$,即 $k(t)=t$. 但是引理1.6.1中等号成立仅当 $k=R_b,b\in\mathbf{R}$. 而 $t=R_b(t)$ 对某个 $t\in(-1,1)$ 成立,只能 $b=0$. 故 $R_0(z)=z$,即 $h=U$,于是(1.6.2)中等号成立,当且仅当

$$\frac{g(za)}{g(a)}=\frac{(c+1)z-(c-1)}{(c+1)-(c-1)z},$$

这样的 g 不是唯一的,可以有多个.

定理1.6.2　如果 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界完全圆型齐性域. $F\in H(\Omega)$,$\mathrm{d}(F)=1$ 及 $\det F'(0)=1$,$\varphi_a(z)$ 为 Ω 的全纯自同构将 a 映到原点. 令 $G(z)=F(\varphi_a(z))$ 及 $g=\det\frac{\partial G}{\partial z}$,则对 Ω 中的每一点 a,有

$$c=\left(\frac{\mathrm{d}g(a)}{\mathrm{d}a}\right)\cdot a'/g(a)=\frac{\partial}{\partial a}K_\Omega(a,\bar{a})\cdot a'/K_\Omega(a,\bar{a}),\tag{1.6.5}$$

式中 $\frac{\mathrm{d}g(a)}{\mathrm{d}a}$ 为 $\left(\frac{\partial g}{\partial z_1},\frac{\partial g}{\partial z_2},\cdots,\frac{\partial g}{\partial z_n}\right)$ 在 $z=a$ 处的值.

证 由于 Ω 为有界完全圆型域,所以由华罗庚[1.32]的结果,Ω 的 Bergman 核函数 K_Ω 可以展开成:

$$K_\Omega(z,\bar{\zeta}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\phi_\nu(z,\bar{\zeta}), \tag{1.6.6}$$

式中 $\phi_\nu(z,\bar{\zeta})$ 是 Ω 上的 $\nu(\nu=0,1,2,\cdots)$ 次齐次多项式空间的再生核,因此,当 $z=\xi a$, $\xi\in D$ 时,

$$K_\Omega(z,\bar{z}) = K_\Omega(\xi a,\overline{\xi a}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}|\xi|^{2\nu}\phi_\nu(a,\bar{a}) \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\phi_\nu(a,\bar{a})$$
$$= K_\Omega(a,\bar{a}).$$

若 $\varphi_a(z)\in\mathrm{Aut}(\Omega)$,且将 a 点映为原点,令

$$G(z) = F(\varphi_a(z)),\quad g(z) = \det\frac{\partial G}{\partial z},$$

由于 $\mathrm{d}(F)$ 为 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 下的不变量,故 $\mathrm{d}(F)=\mathrm{d}(G)=1$. 所以就有:

$$\left|\det\frac{\partial G}{\partial z}(z)\right| \leqslant \sqrt{K_\Omega(z,\bar{z})/K_\Omega(0,0)}$$

对所有 $z\in\Omega$ 都成立,而且

$$\left.\frac{\left|\det\frac{\partial G}{\partial z}(z)\right|}{\sqrt{K_\Omega(z,\bar{z})/K_\Omega(0,0)}}\right|_{z=a} = \left.\frac{\left|\det\frac{\partial F}{\partial w}(w)\right|}{\sqrt{K_\Omega(w,\bar{w})/K_\Omega(0,0)}}\right|_{w=0}$$
$$= \left|\det\frac{\partial F}{\partial w}(0)\right| = 1.$$

于是对所有的 $z=\xi a$, $\xi\in D$, 有

$$\left|\det\frac{\partial G}{\partial z}(a)\right| = \sqrt{K_\Omega(a,\bar{a})/K_\Omega(0,0)} \geqslant \sqrt{K_\Omega(z,\bar{z})/K_\Omega(0,0)}$$
$$\geqslant \left|\det\frac{\partial G}{\partial z}(z)\right|. \tag{1.6.7}$$

因此, $g(z)=\det\frac{\partial G}{\partial z}(z)$ 满足定理1.6.1中的 g 的所有的条件. 于是有不等式(1.6.2),而

$$c = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\det\frac{\partial G}{\partial z}(a)\right]\cdot a' \Big/ \det\frac{\partial G}{\partial z}(a). \tag{1.6.8}$$

但 c 也可用 Bergman 核函数来表达. 由于

$$\det\frac{\partial G(z)}{\partial z}\bigg|_{z=a}=\det\frac{\partial F}{\partial w}\bigg|_{w=0}\det\frac{\partial \varphi_a(z)}{\partial z}\bigg|_{z=a} \tag{1.6.9}$$

以及

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial G(z)}{\partial z}\right)\bigg|_{z=a}&=\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial F}{\partial w}\right)\left(\det\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\det\frac{\partial F}{\partial w}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right)\right]\bigg|_{z=a}\\&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\det\frac{\partial F}{\partial w}\right)\bigg|_{w=0}\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\bigg|_{z=a}\det\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\bigg|_{z=a}\\&\quad+\left(\det\frac{\partial F}{\partial w}\right)\bigg|_{w=0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right)\bigg|_{z=a},\end{aligned}$$

由假设 $\det F'(0)=1$ 及 $\mathrm{d}(F)=1$，就有

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial w}\right|=\left|1+\frac{\partial}{\partial w}\left(\det\frac{\partial F}{\partial w}\right)\bigg|_{w=0}\cdot w'+\cdots\right|\leqslant\sqrt{\frac{K_\Omega(w,\overline{w})}{K_\Omega(0,0)}}.$$

而由(1.6.6)有

$$K_\Omega(w,\overline{w})=K_\Omega(0,0)+O(|w|^2),$$

因此，当 $|w|\to 0$ 时，有

$$\left|1+\frac{\partial}{\partial w}\left(\det\frac{\partial F}{\partial w}\right)\bigg|_{w=0}\cdot w'+\cdots\right|\leqslant 1+O(|w|^2).$$

这就导出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(\det\frac{\partial F}{\partial w}\right)\bigg|_{w=0}=0$. 从而得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial G(z)}{\partial z}\right)\bigg|_{z=a}=\left(\det\frac{\partial F}{\partial w}\right)\bigg|_{w=0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right)\bigg|_{z=a}. \tag{1.6.10}$$

由(1.6.6)，有

$$\left|\det\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right|^2=\frac{K_\Omega(z,\overline{z})}{K_\Omega(\varphi_a(z),\overline{\varphi_a(z)})}.$$

将上式两端对 z 求导，得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\right)\cdot\overline{\det\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial}{\partial z}K_\Omega(z,\overline{z})}{K_\Omega(\varphi_a(z),\overline{\varphi_a(z)})}$$

$$-\frac{K_\Omega(z,\bar{z})}{(K_\Omega(\varphi_a(z),\overline{\varphi_a(z)}))^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}K_\Omega(\varphi_a(z),\overline{\varphi_a(z)}).$$

但是

$$\frac{\partial}{\partial z}K_\Omega(\varphi_a(z),\overline{\varphi_a(z)})=\frac{\partial}{\partial w}K_\Omega(w,\bar{w})\frac{\partial w}{\partial z},$$

式中 $w=\varphi_a(z)$. 当 $z=a$ 时, $w=\varphi_a(a)=0$, 而 $\frac{\partial}{\partial w}K_\Omega(w,\bar{w})\big|_{w=0}=0$ 是显然的, 故有

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial\varphi_a}{\partial z}\right)\cdot\overline{\det\frac{\partial\varphi_a}{\partial z}}\bigg|_{z=a}=\frac{\frac{\partial}{\partial z}K_\Omega(z,\bar{z})\Big|_{z=a}}{K_\Omega(0,0)}. \qquad (1.6.11)$$

将(1.6.9)、(1.6.10)代入(1.6.8), 得到

$$c=\frac{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\det\frac{\partial G}{\partial z}(a)\right]\cdot a'}{\det\frac{\partial G}{\partial z}(a)}=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\Big|_{z=a}\cdot a'}{\left(\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\Big|_{z=a}}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=a}\overline{\left(\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}\bigg|_{z=a}\cdot a'\bigg/\left|\det\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2\bigg|_{z=a}.$$

由(1.6.6)及(1.6.11), 即得到

$$c=\frac{\frac{\partial}{\partial z}K_\Omega(z,\bar{z})\Big|_{z=a}\cdot a'}{K_\Omega(0,0)}\bigg/\frac{K_\Omega(a,\bar{a})}{K_\Omega(0,0)}$$

$$=\frac{\frac{\partial}{\partial a}K_\Omega(a,\bar{a})\cdot a'}{K_\Omega(a,\bar{a})}.$$

这就证明了定理1.6.2.

系1.6.1 假设如定理1.6.2所述, 则有

$$\Re e\left\{\frac{\det\frac{\partial G}{\partial z}(ta)}{\det\frac{\partial G}{\partial z}(a)}\right\}\geqslant\left\{\left[\frac{\partial}{\partial a}K_\Omega(a,\bar{a})\cdot a'+K_\Omega(a,\bar{a})\right]t\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial}{\partial a}K_\Omega(a,\bar{a})\cdot a'-K_\Omega(a,\bar{a})\right]\right\}\bigg/$$

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial a}K_{\Omega}(a,\bar{a})\cdot a'+K_{\Omega}(a,\bar{a})\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial}{\partial a}K_{\Omega}(a,\bar{a})\cdot a'-K_{\Omega}(a,\bar{a})\right]t\right\}. \qquad (1.6.12)$$

利用 $\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$ 及(1.6.9),(1.6.12)则可写成另一形式:

$$\Re e\left\{\frac{\det\left.\frac{\partial F(w)}{\partial w}\right|_{w=\varphi_a(u)}\det\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=u}}{\det\left.\frac{\partial\varphi_a(z)}{\partial z}\right|_{z=a}}\right\}$$

$$\geqslant\left\{\left[\frac{\partial}{\partial a}K_{\Omega}(a,\bar{a})\cdot a'+K_{\Omega}(a,\bar{a})\right]t\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial}{\partial a}K_{\Omega}(a,\bar{a})\cdot a'-K_{\Omega}(a,\bar{a})\right]\right\}\Big/$$

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial a}K_{\Omega}(a,\bar{a})\cdot a'+K_{\Omega}(a,\bar{a})\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial}{\partial a}K_{\Omega}(a,\bar{a})\cdot a'-K_{\Omega}(a,\bar{a})\right]t\right\}. \qquad (1.6.13)$$

上述定理及系对研究全纯映照的 Bloch 常数有用;以下的定理及系对研究局部双全纯映照的 Bloch 常数有用.

定理1.6.3　假设如定理1.6.1所述,且 $g(z)\neq 0$,当 $z\in\Omega$,则对任意的 $x\in(-1,1)$,有不等式

$$\left|\frac{g(xa)}{g(a)}\right|\geqslant\exp\left\{-2c\frac{1-x}{1+x}\right\}. \qquad (1.6.14)$$

为了证明上述定理,要用到如下的半平面形式的 Julie 引理:

引理1.6.2　若 w 为 $D\cup\{1\}$ 上的全纯函数,将 D 映到右半平面 $\mathbf{H}=\{w:\Re e(w)>0\}$,且 $w(1)=0$. 于是对于任意的 $r>0$,函数 w 将表圆 $\overline{\Delta}(1,r)$ 映到圆 $\{w:|w-dr|\leqslant dr\}$,这里 $d=-w'(1)>0$. 第一个圆的一个边界点映到第二个圆的一个边界点,当且仅当 w 为将 D 映到 $\mathbf{H}$ 上且 $w(1)=0$ 的全纯映照.

系1.6.2　对任意 $x\in(-1,1)$,有

$$\Re e(w(x))\leqslant 2d\frac{1-x}{1+x} \qquad (1.6.15)$$

成立，等号对任一 $x\in(-1,1)$ 成立，当且仅当

$$w(z)=2d\,\frac{1-z}{1+z}.$$

现在来证明定理1.6.3：

令 $h(z)=g(za)/g(a)$，$z\in D$，由于 $g(w)\neq0$，当 $w\in\Omega$. 故有全纯函数 $H(z)$，满足 $h(z)=\exp(-H(z))$ 及 $H(1)=0$. 显然，$H(z)$ 满足引理1.6.2的条件. 故由系1.6.2，即得定理1.6.3.

由定理1.6.2，即得：

系1.6.3 假设如定理1.6.2所述，则有

$$\left|\frac{\det\dfrac{\partial G}{\partial z}(xa)}{\det\dfrac{\partial G}{\partial z}(a)}\right|\geqslant\exp\left\{\frac{-2\dfrac{\partial}{\partial a}K_\Omega(a,\bar a)\cdot a'}{K_\Omega(a,\bar a)}\cdot\frac{1-x}{1+x}\right\}.\tag{1.6.16}$$

利用 $\dfrac{\partial G}{\partial z}=\dfrac{\partial F}{\partial w}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial z}$ 及 (1.6.9)，(1.6.16)可写成另一形式：

$$\left|\frac{\det\left.\dfrac{\partial F}{\partial w}\right|_{w=\varphi_a(xa)}\det\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=xa}}{\det\left.\dfrac{\partial\varphi_a(z)}{\partial z}\right|_{z=a}}\right|\geqslant\exp\left\{\frac{-2\dfrac{\partial}{\partial a}K_\Omega(a,\bar a)\cdot a'}{K_\Omega(a,\bar a)}\cdot\frac{1-x}{1+x}\right\}.\tag{1.6.17}$$

这里 $x\in(-1,1)$.

§1.7 典型域上全纯映照的 Bloch 常数

有了前两节的准备后，即可讨论典型域及更为一般的有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数了. 在这一节中，给出第一类典型域 R_I 上的全纯映照的 Bloch 常数的估计，这是 FitzGerald 与龚昇的工作(见文献[1.14]和[1.15]). 由此可相仿地得到其他几类典型域上相应的结果. 在下一节中将给出所有不可约有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数的估计，所以也就不必在此对其他几类典型域的相应的问题进行讨论了. 在下一节的讨论中，要用到李代数的

一些结果,而在本节的讨论中,只用了分析的方法,易于了解.而有了对本节的了解,也将有助于对下一节的理解.这就是为什么尽管在下一节中将给出所有不可约有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数的估计,还依然要在本节给出第一类典型域上相应结果的证明的缘故.

在本节只考虑第一类典型域 R_I,即 $\{Z\in\mathbf{C}^{m\times n}:I-Z\overline{Z}'>0\}$,及讨论 R_I 上全纯映照与局部双全纯映照的 Bloch 常数.

首先将§1.1中 $\mathbf{C}$ 中的单位圆 Δ 上全纯函数的 Bonk 偏差定理推广到 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中的 R_I 上全纯映照.然后对相应的 Bloch 常数进行估计.最后讨论 R_I 上的局部双全纯映照的 Bloch 常数.

固定 $a=Z_0\in R_I$.若 $\varphi_a(Z)$ 为 R_I 中的全纯自同构,将 Z_0 点映为原点,则 $\varphi_a(Z)$ 可表为[1.32]:

$$W=\varphi_a(Z)=A(Z-Z_0)(I-\overline{Z}'_0Z)^{-1}D^{-1},\quad (1.7.1)$$

这里

$$\overline{A}'A=(I-Z_0\overline{Z}'_0)^{-1},\ \overline{D}'D=(I-\overline{Z}'_0Z_0)^{-1},\quad (1.7.2)$$

而 A 为 $m\times m$ 方阵,D 为 $n\times n$ 方阵.W 对 Z 求导,有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W=&A\mathrm{d}Z(I-\overline{Z}'_0Z)^{-1}D^{-1}\\&+A(Z-Z_0)(I-\overline{Z}'_0Z)^{-1}\overline{Z}'_0\mathrm{d}Z(I-\overline{Z}'_0Z)^{-1}D^{-1}.\end{aligned}\quad (1.7.3)$$

当 $Z=Z_0$, 由 (1.7.2)及(1.7.3)导出:

$$\mathrm{d}W=A\mathrm{d}Z\,\overline{D}'.\quad (1.7.3')$$

故在 $Z=Z_0$ 点,就可以计算出 W 的 Jacobain 在该点的值为[1.32]:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{Z=Z_0}=A'\otimes\overline{D}',\quad (1.7.4)$$

这里⊗为矩阵的 Kronecker 乘积.这又导出

$$\det\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_{Z=Z_0}=(\det A)^n(\det\overline{D})^m.$$

从(1.7.3)可得到:

$$\mathrm{d}W=A(I-Z_0\overline{Z}'_0)(I-Z\overline{Z}'_0)^{-1}\mathrm{d}Z(I-\overline{Z}'_0Z)^{-1}D^{-1}.$$

根据(1.7.2),上式即为

$$\mathrm{d}W = \overline{A}'^{-1}(I - Z\overline{Z}_0')^{-1}\mathrm{d}Z(I - \overline{Z}_0'Z)^{-1}D^{-1}. \quad (1.7.5)$$

取 $Z=tZ_0$，可得到

$$\mathrm{d}W = \overline{A}'^{-1}(I - tZ_0\overline{Z}_0')^{-1}\mathrm{d}Z(I - t\overline{Z}_0'Z_0)^{-1}D^{-1},$$

于是

$$\frac{\partial W}{\partial Z}(tZ_0) = [\overline{A}'^{-1}(I - tZ_0\overline{Z}_0')^{-1}]' \otimes [(I - t\overline{Z}_0'Z_0)^{-1}D^{-1}],$$

以及

$$\det\frac{\partial W}{\partial Z}(tZ_0) = \det[I - tZ_0\overline{Z}_0']^{-n-m}[\det\overline{A}']^{-n}[\det D]^{-m}.$$

由此方程及(1.7.4)以及(1.7.2)，则有

$$\frac{\det\dfrac{\partial W}{\partial Z}(tZ_0)}{\det\dfrac{\partial W}{\partial Z}(Z_0)} = \frac{[\det(I - Z_0\overline{Z}_0')]^{m+n}}{[\det(I - tZ_0\overline{Z}_0')]^{m+n}}.$$

R_I 当然满足定理1.6.1及1.6.2中的条件，于是(1.6.13)成为

$$\begin{aligned}\Re\left\{\det\frac{\partial F}{\partial W}(\varphi(tZ_0))\right\} \geqslant & \frac{\det(I - tZ_0\overline{Z}_0')^{m+n}}{\det(I - Z_0\overline{Z}_0')^{m+n}} \\ & \times\left(\left\{\left[\frac{\partial}{\partial Z}K_{R_I}(Z,\overline{Z})Z' + K_{R_I}(Z,\overline{Z})\right]t\right.\right. \\ & \left.-\left[\frac{\partial}{\partial Z}K_{R_I}(Z,\overline{Z})Z' - K_{R_I}(Z,\overline{Z})\right]\right\} \\ & \bigg/\left\{\left[\frac{\partial}{\partial Z}K_{R_I}(Z,\overline{Z})Z' + K_{R_I}(Z,\overline{Z})\right]\right. \\ & \left.\left.-\left[\frac{\partial}{\partial Z}K_{R_I}(Z,\overline{Z})Z' - K_{R_I}(Z,\overline{Z})\right]t\right\}\right)\bigg|_{Z=Z_0}, \quad (1.7.6)\end{aligned}$$

这里 $Z=(z_{11},\cdots,z_{1n},z_{21},\cdots,z_{2n},\cdots,z_{m1},\cdots,z_{mn})$.

由文献[1.32]知：

$$K_{R_I}(Z,\overline{W}) = V(R_I)^{-1}\{\det(I - Z\overline{W}')\}^{-(m+n)},$$

这里 $V(R_I)$ 为 R_I 的体积，于是

$$\frac{\partial}{\partial z_{ij}}K_{R_I}(Z,\overline{W}) = -(m+n)V(R_I)^{-1}\{\det(I - Z\overline{W}')\}^{-(m+n)-1}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \det(I - Z\overline{W}').$$

经过直接计算，可得

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \det(I - Z\overline{Z}') = \det\left[\begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & I \end{pmatrix} - Z\overline{Z}'\right].$$

上式右端的括号中的矩阵$\begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & I \end{pmatrix}$为 $m \times m$ 方阵，其中(i,i)位置上为0. 于是可以得到：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \det(I - Z\overline{Z}') = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix} - Z\overline{Z}'\right] + \cdots$$

$$+ \det\left[\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} - Z\overline{Z}'\right]. \tag{1.7.7}$$

以 $S(Z)$记(1.7.7)式的右端，(1.7.6)成为

$$\Re e\left\{\det \frac{\partial F}{\partial W}(\varphi(tZ_0))\right\} \geqslant \frac{\det(I - tZ_0\overline{Z}_0')^{m+n}}{\det(I - Z_0\overline{Z}_0')^{m+n}}$$

$$\times \{[\det(I - Z_0\overline{Z}_0') - (m+n)S(Z_0)]t$$

$$+ [\det(I - Z_0\overline{Z}_0') + (m+n)S(Z_0)]\}$$

$$/\{[\det(I - Z_0\overline{Z}_0') - (m+n)S(Z_0)]$$

$$+ [\det(I - Z_0\overline{Z}_0') + (m+n)S(Z_0)]t\}. \tag{1.7.8}$$

由(1.7.1)得：

$$\varphi(tZ_0) = (t-1)AZ_0(I - t\overline{Z}_0'Z_0)^{-1}D^{-1}$$

$$= (t-1)A(I - tZ_0\overline{Z}_0')^{-1}Z_0D^{-1}. \tag{1.7.9}$$

而 R_I 中任一矩阵 Z 可表为 $U\Lambda V$，这里 U 和 V 为酉方阵，Λ 为对角阵，对角线上的元素为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$，且满足$1 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m \geqslant 0$. 于是只需先考虑

$$Z_0 = -\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix},\ 1 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m \geqslant 0. \tag{1.7.10}$$

于是(1.7.2)成为

$$\overline{A}'A=\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\lambda_1^2} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{1-\lambda_m^2}\end{pmatrix},\quad \overline{D}'D=\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\lambda_1^2} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{1-\lambda_m^2} & \\ 0 & & & I\end{pmatrix}.$$

因此，可以取

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}}\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} & \\ 0 & & & I\end{pmatrix},$$

代入(1.7.9)，成为

$$\varphi(tZ_0)=\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{pmatrix},$$

这里 $\mu_j=\frac{(1-t)\lambda_j}{1-t\lambda_j^2}$ $(j=1,\cdots,m)$. 显然 $|\mu_j|<1$. 从上式中解出 t，得到

$$t=\frac{\lambda_j-\mu_j}{\lambda_j(1-\lambda_j\mu_j)}. \tag{1.7.11}$$

由于 R_I 为完全圆型域，$Z_0\in R_I$ 导出 $tZ_0\in R_I$，当 $t\in[-1,1]$. 从 μ_j 的定义可以看出这是 t 的一个单调函数. 故

$$0\leqslant\mu_j\leqslant\frac{2\lambda_j}{1+\lambda_j^2}\quad(j=1,2,\cdots,n). \tag{1.7.12}$$

当(1.7.8)式中的 Z_0 如有(1.7.10)的形式，则有

$$\Re\left\{\det\frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right\}\geqslant\frac{\prod_{j=1}^{m}(1-t\lambda_j^2)^{m+n}}{\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)^{m+n}}\cdot\frac{N}{E}, \tag{1.7.13}$$

式中

$$N=\left\{\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)+(m+n)\left[\lambda_1^2\prod_{j=2}^{m}(1-\lambda_j^2)+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_m^2\prod_{j=1}^{m-1}(1-\lambda_j^2)\right]\right\}t$$

$$+\left\{\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)-(m+n)\left[\lambda_1^2\prod_{j=2}^{m}(1-\lambda_j^2)+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_m^2\prod_{j=1}^{m-1}(1-\lambda_j^2)\right]\right\};$$

$$E=\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)+(m+n)\left[\lambda_1^2\prod_{j=2}^{m}(1-\lambda_j^2)+\cdots\right.$$

$$\left.+\lambda_m^2\prod_{j=1}^{m-1}(1-\lambda_j^2)\right]$$

$$+\left(\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)-(m+n)\left[\lambda_1^2\prod_{j=2}^{m}(1-\lambda_j^2)+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_m^2\prod_{j=1}^{m-1}(1-\lambda_j^2)\right]\right)t.$$

由于

$$1-t\lambda_j^2=\frac{1-\lambda_j^2}{1-\lambda_j\mu_j},$$

因此

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}(1-t\lambda_j^2)}{\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)}=\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}. \tag{1.7.14}$$

另一方面，

$$N=(t+1)\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)-(m+n)(1-t)\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}(1-\lambda_j^2),$$

$$E=(t+1)\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)+(m+n)(1-t)\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2\prod_{j\neq k}^{m}(1-\lambda_j^2).$$

由(1.7.11)，有

$$1-t=\frac{\mu_j(1-\lambda_j^2)}{\lambda_j(1-\lambda_j\mu_j)},\ 当\ j=1,\cdots,m,$$

以及

$$(1-t)\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}(1-\lambda_j^2)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k\mu_k}{1-\lambda_k\mu_k}\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2),$$

从而有

$$\frac{N}{E}=\frac{(t+1)+m(m+n)-(m+n)\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}}{(t+1)-m(m+n)+(m+n)\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}}. \tag{1.7.15}$$

根据(1.7.14)及(1.7.15),不等式(1.7.13)成为

$$\Re\left\{\det\frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right\}\geqslant\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(1-\lambda_j\mu_j)^{m+n}}\times\frac{(t+1)+m(m+n)-(m+n)\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}}{(t+1)-m(m+n)+(m+n)\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}}. \tag{1.7.16}$$

最后看(1.7.16)的右端何时为正的.

固定 $\lambda_1=(m^2+mn+1)^{\frac{-1}{2}}$,根据(1.7.12),这时 $\mu_1<2\sqrt{m^2+mn+1}/(m^2+mn+2)$. 于是,如果$2\sqrt{m^2+mn+1}/(m^2+mn+2)>\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_m\geqslant0$,则可以找到$-1<t<1$及$1>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\geqslant0$. t 的值可由(1.7.11)所决定. 在(1.7.11)中可以看出:如果而定 λ_1,则 t 为 μ 的严格单调下降函数. 当 μ_1从 0 变到 $2\sqrt{m^2+mn+1}/(m^2+mn+2)$ 时,则 t 从$+1$变到-1.

固定了 μ_1及 λ_1,从而而定了 t. 从(1.7.11)中可得到:给了 μ_2 就可得到相应的 λ_k. 在(1.7.11)中去掉指标,而把 t 当作常数,则得方程

$$t=\frac{\lambda-\mu}{\lambda(1-\lambda\mu)}. \tag{1.7.17}$$

将 λ 看作 μ 的函数,将上式对 μ 求导数,得到

$$0=\{(\lambda'-1)[\lambda(1-\lambda\mu)]-(\lambda-\mu)[\lambda'(1-\lambda\mu)+\lambda(-\lambda'\mu)+\lambda(-\lambda)]\}\div[\lambda(1-\lambda\mu)]^2,$$

此即为

$$\lambda'\mu\{1-2\lambda\mu+\lambda^2\}=\lambda(1-\lambda^2).$$

当$0<\mu\leqslant\mu_1<1$ 时,$\{\cdot\}$为正的. 所以当 $0<\lambda<1$ 时,

$$\lambda'=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\mu+\lambda^2}>0. \qquad (1.7.18)$$

当 $\mu=\mu_1$ 时, $\lambda_1=(m^2+mn+1)^{-\frac{1}{2}}$. 当 μ 从 μ_1 递减时,则 λ 也递减,且为正的(当 μ 为正时). 而 $\lim\limits_{\mu\to0^+}\lambda(\mu)=0$.

因此,对于任何

$$\frac{2\sqrt{m^2+mn+1}}{m^2+mn+2}>\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_m\geqslant0,$$

存在相应的 t 及 λ_i,使得 $-1<t<1$ 及

$$(m^2+mn+1)^{\frac{-1}{2}}=\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\geqslant0.$$

由于 λ、μ 满足上述条件,故(1.7.16)的右端第二个分式的分子是正的. 此外,

$$\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{1-\lambda_m\mu_m}\geqslant1.$$

令 $\gamma=(m^2+mn+1)^{1/2}$, 且在(1.7.11)中取 $j=1$, 则 $t=\gamma(1-\gamma\mu_1)/(\gamma-\mu_1)$.

若记(1.7.16)的右端为 R,任取 i 为2,3,…,m 中的一个. 且令

$$x=\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i},$$

$$A=t+1+m(m+n)-(m+n)\sum_{j\neq i}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j},$$

$$B=t+1-m(m+n)+(m+n)\sum_{j\neq i}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j},$$

及

$$p=m+n.$$

从而得
$$R=\prod_{j\neq i}\frac{1}{(1-\lambda_j\mu_j)^{m+n}}\left(x^p\frac{A-px}{B+px}\right).$$

令 $f(x)=x^p\dfrac{A-px}{B+px}$，则
$$f'(x)=\frac{x^{p-1}p}{(B+px)^2}\{AB+[A(p-1)-B(p+1)]x-p^2x^2\}.$$
将 A、B 及 p 的值代入{ }中，且令 $Q=\sum\limits_{j\neq i}\dfrac{1}{1-\lambda_j\mu_j}$，则
$$f'(x)=\frac{x^{p-1}}{(B+px)^2}p\{-(m+n)^2(x-m+Q)^2$$
$$+(t+1)(t+1-2x)\}.$$
在(1.7.11)中取 $j=i$，得 $t=\dfrac{\lambda_i-\mu_i}{\lambda_i-\lambda_i^2\mu_i}$. 由于 $x=\dfrac{1}{1-\lambda_i\mu_i}$，从而有
$$t+1-2x=\frac{\lambda_i-\mu_i}{\lambda_i-\lambda_i^2\mu_i}+1-\frac{2}{1-\lambda_i\mu_i}=\frac{-\mu_i-\lambda_i^2\mu_i}{\lambda_i(1-\lambda_i\mu_i)}\leqslant 0.$$
故 $f'(x)\leqslant 0$. 由于
$$\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}\geqslant\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i}\quad(i=2,3,\cdots,m).$$
在 R 中，以 $\dfrac{1}{1-\lambda_1\mu_1}$ 替代 $\dfrac{1}{1-\lambda_i\mu_i}$ $(i=2,3,\cdots,m)$，则 R 不增. 于是由(1.7.16)，就有
$$\mathfrak{Re}\left\{\det\frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right\}\geqslant\frac{1}{(1-\lambda_1\mu_1)^{m(m+n)}}$$
$$\times\frac{t+1+m(m+n)-m(m+n)\dfrac{1}{1-\lambda_1\mu_1}}{t+1-m(m+n)+m(m+n)\dfrac{1}{1-\lambda_1\mu_1}},$$
而
$$t=\frac{\lambda_1-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_1^2\mu_1}=\frac{\sqrt{m^2+mn+1}(1-\sqrt{m^2+mn+1}\mu_1)}{\sqrt{m^2+mn+1}-\mu_1},$$
则
$$\mathfrak{Re}\left\{\det\frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right\}\geqslant\frac{1}{\left(1-\dfrac{\mu_1}{\gamma}\right)^{m(m+n)}}\cdot\frac{\gamma-(m^2+mn+1)\mu_1}{\gamma-\mu_1},$$

这里 $\gamma=\sqrt{m^2+mn+1}$. 于是

$$\Re\left\{\det\frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right\}\geqslant\frac{1-\sqrt{m^2+mn+1}\mu_1}{\left(1-\dfrac{\mu_1}{\sqrt{m^2+mn+1}}\right)^{m^2+mn+1}}\tag{1.7.19}$$

当 $\mu_1<\dfrac{2\sqrt{m^2+mn+1}}{m^2+mn+2}$ 时成立.

可以将(1.7.19)拓广到对于 R_I 中的非对角线元素的点也是成立的. 若 $W_0\in R_I$, 则 $W_0=U\mu V$, 这里 U 和 V 为酉方阵, μ 为对角线阵. 令 $W=UZV$, 而 $Z\in R_I$, $G(Z)=U^{-n}F(UZV)V^{-m}$, 于是

$$\frac{\partial G}{\partial Z}=U^{-n}\frac{\partial F}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial Z}V^{-m},$$

以及

$$\det\frac{\partial G}{\partial Z}=(\det U)^{-n}(\det V)^{-m}\det\frac{\partial F}{\partial W}\det\frac{\partial W}{\partial Z}.$$

由于 $dW=UdZV$, 故 $\dfrac{\partial W}{\partial Z}=U'\otimes V$ 及 $\det\dfrac{\partial W}{\partial Z}=(\det U')^n(\det V)^m$. 这就得到

$$\det\frac{\partial G}{\partial Z}(Z)=\det\frac{\partial F}{\partial W}(W).$$

特别是当 $Z=\mu, W=W_0$ 时, 由于 G 满足条件:

$$G\in\mathfrak{B},\ d(G)=1,\ \det\frac{\partial G}{\partial Z}(0)=1,$$

在(1.7.19)中以 G 替代 F, 以 Z 替代 W, 于是得到

$$\Re\left\{\det\frac{\partial G}{\partial Z}(\mu)\right\}\geqslant\frac{1-\sqrt{m^2+mn+1}\mu_1}{\left(1-\dfrac{\mu_1}{\sqrt{m^2+mn+1}}\right)^{m^2+mn+1}}$$

成立. 从而得到如下定理[1.14]:

定理1.7.1 若 $F\in\mathfrak{B}$, $d(F)=1$, $\det\dfrac{\partial F}{\partial W}(0)=1$, 则有

$$\Re\left\{\det\frac{\partial F}{\partial W}(W)\right\}\geqslant\frac{1-\sqrt{m^2+mn+1}\|W\|_M}{\left(1-\dfrac{\|W\|_M}{\sqrt{m^2+mn+1}}\right)^{m^2+mn+1}}\tag{1.7.20}$$

当 $\|W\|_M \leqslant \dfrac{2\sqrt{m^2+mn+1}}{m^2+mn+2}$ 时成立，这里 $\|W\|_M$ 为矩阵范数.

这是 Bonk 定理的推广. 当 $m=1$ 时，R_I 成为 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球 B^n. 此时的定理1.7.1为刘向阳所证明(见文献[1.40]).

现在用定理1.7.1来讨论 Bloch 常数.

引理1.7.1 若 f 为 R_I 上的 Bloch 映照，将 R_I 映入 $\mathbf{C}^{m\times n}$，则

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial Z}(Z)\right\|_M \leqslant \frac{\|f\|_B}{1-\|Z\|_M^2}. \tag{1.7.21}$$

证 若 φ_Z 为 R_I 的全纯自同构将 Z 映为原点，由于

$$\begin{aligned}\|f'(Z)\|_M &= \|[(f\circ\varphi_Z)'(0)]\cdot[\varphi'_Z(0)]^{-1}\|_M \\ &= \|(f\circ\varphi_Z)'(0)\|_M\cdot\|\varphi'_Z(0)^{-1}\|_M,\end{aligned}$$

故

$$\|f'(Z)\|_M \leqslant \|f\|_B\cdot\|\varphi'_Z(0)^{-1}\|_M. \tag{1.7.22}$$

固定 Z_0，则

$$\varphi_{Z_0}(Z) = A(Z-Z_0)(I-\overline{Z}'_0Z)^{-1}D^{-1},$$

由(1.7.5)，可得

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = [\overline{A}'^{-1}(I-Z\overline{Z}'_0)^{-1}]'\otimes[(I-\overline{Z}'_0Z)^{-1}D^{-1}],$$

在 $Z=0$点，有

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \overline{A}^{-1}\otimes D^{-1}$$

及

$$\overline{\frac{\partial W'}{\partial Z}} = A'^{-1}\otimes\overline{D}'^{-1}.$$

于是

$$\frac{\partial W}{\partial Z}\overline{\frac{\partial W'}{\partial Z}} = \overline{A}^{-1}A'^{-1}\otimes D^{-1}\overline{D}'^{-1}.$$

由(1.7.2)，

$$A^{-1}\overline{A}'^{-1} = I - Z_0\overline{Z}'_0 \quad 及 \quad D^{-1}\overline{D}'^{-1} = I-\overline{Z}'_0Z_0,$$

故有

$$\frac{\partial W}{\partial Z}\overline{\frac{\partial W'}{\partial Z}}=(I-\overline{Z}_0Z_0')\otimes(I-\overline{Z}_0'Z_0).$$

因而$\frac{\partial W}{\partial Z}\cdot\overline{\frac{\partial W'}{\partial Z}}$的最小特征根为$(1-\mu_1^2)^2$,而 μ_1^2为 $Z_0\overline{Z}_0'$的最大特征根. 于是$\left(\overline{\frac{\partial W'}{\partial Z}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)^{-1}$的最大特征根为$(1-\mu_1^2)^{-1}$. 从而得到

$$\left\|\left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)^{-1}\right\|_M=(1-\mu_1^2)^{-1},$$

即

$$\|[\phi_Z(0)]^{-1}\|_M=\frac{1}{1-\|Z\|_M^2}. \tag{1.7.23}$$

从(1.7.22)及(1.7.23)便可得到(1.7.21).

定理1.7.2　若 $F:R_I\to\mathbf{C}^{m\times n}$及 $F\in\mathfrak{B}(R_I)$, $\mathrm{d}(F)=1$,

$$\det\frac{\partial F}{\partial Z}(0)=1,\ \|F\|_B\leqslant K,$$

则

$$r(O,F)\geqslant C(K,m,n)$$

$$=K^{1-mn}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{m^2+mn+1}}}\frac{(1-\sqrt{m^2+mn+1}\,t)(1-t^2)^{mn-1}}{\left(1-\frac{t}{\sqrt{m^2+mn+1}}\right)^{m^2+mn+1}}\mathrm{d}t. \tag{1.7.24}$$

证　由定理假设,R_I 在 F 的象中包含有原点,且包含以原点为中心的一个小球. 这个小球可以扩充,直到球面遇到 R_I 在 F 的象的边界或 $\det\frac{\partial F}{\partial Z}=0$为止. 由引理1.7.2,这个小球的半径就是 $r(O,F)$. 由定理1.7.1,当$\|W\|_M\leqslant\frac{2\sqrt{m^2+mn+1}}{m^2+mn+2}$时,$\det\frac{\partial F}{\partial Z}\neq0$. 在 R_I 于 F 的象域中取一条直线 Γ,由原点出发到这一点,这点的原象或在 R_I 的边界上，或是$\det\frac{\partial F}{\partial Z}=0$. 显然，由 (1.7.20) 及 (1.7.21),得

$$r(O,F)\geqslant\left|\int_\Gamma \mathrm{d}W\right|=\int_\gamma\left|\frac{\partial F}{\partial Z}\frac{\mathrm{d}Z'}{|\mathrm{d}Z|}\right||\mathrm{d}Z|\geqslant\int_\gamma\frac{\left|\det\dfrac{\partial F}{\partial Z}\right|}{\left\|\dfrac{\partial F}{\partial Z}\right\|_M^{mn-1}}|\mathrm{d}Z|$$

$$\geqslant\int_0^{\frac{1}{\sqrt{m^2+mn+1}}}\frac{1-\sqrt{m^2+mn+1}\|Z\|_M}{\left(1-\dfrac{\|Z\|_M}{\sqrt{m^2+mn+1}}\right)^{m^2+mn+1}}\times\frac{(1-\|Z\|_M^2)^{mn-1}}{K^{mn-1}}\mathrm{d}|Z|. \quad (1.7.25)$$

这里　$\gamma=F^{-1}(\Gamma)$，$\sqrt{m^2+mn+1}=c$，$\|Z\|_M=x$，令

$$g(x)=\frac{(1-cx)(1-x^2)^{mn-1}}{\left(1-\dfrac{x}{c}\right)^{c^2}},$$

则

$$g'(x)=\frac{(1-x^2)^{mn-2}\left\{x(1-x^2)(1-c^2)-2x\left(1-\dfrac{x}{c}\right)(1-cx)(mn-1)\right\}}{\left(1-\dfrac{x}{c}\right)^{c^2+1}}$$

$$<0.$$

当$0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{c}$时，由于$|Z|\geqslant\|Z\|_M$，故(1.7.25)的右端大于等于

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{m^2+mn+1}}}\frac{(1-\sqrt{m^2+mn+1}t)(1-t^2)^{mn-1}}{\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{m^2+mn+1}}\right)^{m^2+mn+1}}\mathrm{d}t.$$

这就证明了定理.

为了得到 Bloch 常数上界的估计，取

$$W=(W_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}=F(Z)=\begin{pmatrix}Kz_{11}, & \cdots, & Kz_{1,n-1}, & Kz_{1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ Kz_{m1}, & \cdots, & Kz_{m,n-1}, & K^{1-mn}z_{m,n}\end{pmatrix}. \quad (1.7.26)$$

式中 $K\geqslant1$. 将 R_I 映到

$$I-\begin{pmatrix}\frac{W_{11}}{K}, & \cdots, & \frac{W_{1,n-1}}{K}, & \frac{W_{1n}}{K}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{W_{m1}}{K}, & \cdots, & \frac{W_{m,n-1}}{K}, & \frac{K^{mn}W_{mn}}{K}\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}\frac{W_{11}}{K}, & \cdots, & \frac{W_{1,n-1}}{K}, & \frac{W_{1n}}{K}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{W_{m1}}{K}, & \cdots, & \frac{W_{m,n-1}}{K}, & \frac{K^{mn}W_{mn}}{K}\end{pmatrix}}'>0.$$

映照(1.7.26)的 Jacobian 为

$$\frac{\partial W}{\partial Z}=\begin{pmatrix}K & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & K & \\ 0 & & & K^{1-mn}\end{pmatrix},$$

故 $\det\frac{\partial W}{\partial Z}(0)=1$.

若 $\varphi(Z)$ 为 R_I 的全纯自同构,将 $Z_0\in R_I$ 映为原点,则

$$\frac{\partial F\circ\varphi}{\partial Z}(0)=\frac{\partial F}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial Z}(0)=\begin{pmatrix}K & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & K & \\ 0 & & & K^{1-mn}\end{pmatrix}\overline{A}^{-1}\otimes D^{-1}.$$

而易知

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial Z}(0)\right\|_M=1-\mu_m^2,$$

这里 μ_m^2 为 $\overline{Z}_0'Z_0$ 的最小特征根. 于是得

$$\|F\|_B=\sup\left\{\left\|\frac{\partial F\circ\varphi}{\partial Z}(0)\right\|_M;\varphi\in\mathrm{Aut}(R_I)\right\}\leqslant K.$$

所以(1.7.26)所定义的映照属于 $\mathfrak{B}_K$. 且显然可看出:在(1.7.26)所定义的映照的 R_I 的象中,以原点为中心的球的最大半径为 K^{1-mn}.

结合定理1.5.2及定理1.7.2就得如下定理[1.14]:

定理1.7.3　映照族 $\mathfrak{B}_K(R_I)$的 Bloch 常数 $B_K(R_I)$满足:

$$K^{1-mn}\geqslant B_K(R_I)$$

$$\geqslant K^{1-mn}\int_0^{(m^2+mn+1)^{-1/2}}\frac{(1-(m^2+mn+1)^{1/2}t)(1-t^2)^{mn-1}}{\left(1-\frac{t}{(m^2+mn+1)^{\frac{1}{2}}}\right)^{m^2+mn+1}}\mathrm{d}t. \tag{1.7.27}$$

当 $m=1$时,R_I 成为 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球 B^n,(1.7.27)式为刘向阳所证明[1.40]. 当 $m=1,n=1$时,R_I 成为 C 中的单位圆 Δ,(1.7.27)就是 $B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$, Ahlfors 的著名结果[1.1],[1.2].

现在考虑 Ω 上的局部双全纯映照族,即:$F(Z)$为 Ω 上的全纯映照,且 $\det\frac{\partial F}{\partial Z}(z)\neq 0$ 对所有 $z\in\Omega$ 都成立.

令

$\mathfrak{B}^0=\left\{F\in\mathfrak{B},\det\frac{\partial F}{\partial Z}(z)\neq 0\text{ 对所有的 } z\in\Omega\right\}$;

$\mathfrak{B}_K^0=\{F\in\mathfrak{B}^0,\|F\|_B\leqslant K\},1\leqslant K\leqslant\infty$;

$\mathfrak{B}_{K,1}^0=\{F\in\mathfrak{B}_K^0,\ d(F)=1\}$,

这里 $\mathfrak{B}$ 由 §1.5中所定义. 分别以 B^0、B_K^0、$B_{K_1}^0$表示全纯映照族 $\mathfrak{B}^0$、$\mathfrak{B}_K^0$、$\mathfrak{B}_{K_1}^0$的 Bloch 常数,显然相应的 Landau 定理(定理1.5.2)是成立的.

仍然考虑第一类典型域 R_I.

此时由于 $F\in\mathfrak{B}_0$, $\det\frac{\partial F}{\partial W}\neq 0$ 以及

$$\frac{\det\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=xa}}{\det\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=a}}=\left(\frac{\det(I-Z_0\overline{Z}'_0)}{\det(I-xZ_0\overline{Z}'_0)}\right)^{m+n}>0,$$

所以当 $F\in\mathfrak{B}_0$ 时,由(1.6.17)则得到

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial W}(\varphi(xZ_0))\right|\geqslant\left(\frac{\det(I-xZ_0\overline{Z}'_0)}{\det(I-Z_0\overline{Z}'_0)}\right)^{m+n}$$
$$\times\exp\left\{\frac{-Z\frac{\partial}{\partial Z}K(Z,\overline{Z})\cdot Z'}{K(Z,\overline{Z})}\cdot\frac{1-x}{1+x}\right\}\Bigg|_{z=z_0}. \tag{1.7.28}$$

由于

$$\left.\frac{\frac{\partial}{\partial Z}K(Z,\overline{Z})Z'}{K(Z,\overline{Z})}\right|_{z=z_0}=\frac{-(m+n)S(Z_0)}{\det(I-Z_0\overline{Z}'_0)},$$

这里 $S(Z)$ 为(1.7.7)的右端. 所以(1.7.28)成为

$$\left|\det \frac{\partial F}{\partial W}(\varphi(xZ_0))\right| \geqslant \left(\frac{\det(I - xZ_0\overline{Z}'_0)}{\det(I - Z_0\overline{Z}'_0)}\right)^{m+n} \times \exp\left\{\frac{2(m+n)S(Z_0)}{\det(I - Z_0\overline{Z}'_0)} \cdot \frac{1-x}{1+x}\right\}. \tag{1.7.29}$$

对于任一 $Z\in R_I$, 可以表为 $Z=U\Lambda V$, 这里 U 和 V 为酉阵, Λ 为对角阵, 其对角线元素为 $1>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\geqslant 0$. 如同证明定理 1.7.1中那样, 只需考虑矩阵

$$Z_0 = -\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}, \quad 1 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m \geqslant 0.$$

又如同在证明定理1.7.1中所论述的那样, 这时

$$\varphi(xZ_0) = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m \end{bmatrix},$$

这里 $\mu_j = \dfrac{(1-x)\lambda_j}{1-x\lambda_j^2}$ $(j=1,\cdots,m)$. 由于

$$\det(I - Z_0\overline{Z}'_0) = \prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2),$$

$$S(Z_0) = \sum_{k=1}^{m}\prod_{j\neq k}(1-\lambda_j^2)(-\lambda_k^2),$$

所以

$$\frac{S(Z_0)}{\det(I - Z_0\overline{Z}'_0)} = -\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^2}{1-\lambda_k^2}.$$

由(1.7.14), 有

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(1-x\lambda_j^2)}{\prod\limits_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)} = \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}.$$

因此(1.7.29)成为

$$\left|\det \frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right| \geqslant \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(1-\lambda_j\mu_j)^{m+n}}$$

$$\times \exp\left\{\frac{-2(m+n)(1-x)}{1+x}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^2}{1-\lambda_k^2}\right\}. \tag{1.7.30}$$

但是

$$1-x=\frac{\mu_j(1-\lambda_j^2)}{\lambda_j(1-\lambda_j\mu_j)} \quad (j=1,\cdots,m),$$

故

$$\frac{(1-x)\lambda_k^2}{1-\lambda_k^2}=\frac{\lambda_k\mu_k}{1-\lambda_k\mu_k} \quad (k=1,\cdots,m). \tag{1.7.31}$$

于是(1.7.30)成为

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right| \geqslant \prod_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}\exp\left\{\frac{-2}{1+x}\frac{\lambda_j\mu_j}{1-\lambda_j\mu_j}\right\}\right]^{m+n}. \tag{1.7.32}$$

令 $f(Y)=\frac{1}{1-Y}\exp\left\{\frac{-2}{1+x}\cdot\frac{Y}{1-Y}\right\}$，则

$$f'(Y)=\frac{1}{(1-Y)^3(1+x)}$$
$$\times \exp\left\{\frac{-2}{1+x}\frac{Y}{1-Y}\right\}[(1+x)(1-Y)-2]<0,$$

即 $f(Y)$为 Y 的递减函数，当 $0\leqslant Y\leqslant 1$, $0\leqslant X\leqslant 1$ 时. 由 λ 和 μ 的关系，已知 $\lambda_1\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\mu_m$, 故在(1.7.32)中，以 $\lambda_1\mu_1$ 替代 $\lambda_i\mu_i$ $(i=2,3,\cdots,m)$，则(1.7.32)右端的值不增，于是就有

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right| \geqslant \frac{1}{(1-\lambda_1\mu_1)^{m(m+n)}}\exp\left\{\frac{-2m(m+n)}{1+x}\cdot\frac{\lambda_1\mu_1}{1-\lambda_1\mu_1}\right\}. \tag{1.7.33}$$

由于 x、λ_j 和 μ_j 之间由(1.7.11)联系起来，即

$$x=\frac{\lambda_j-\mu_j}{\lambda_j(1-\lambda_j\mu_j)} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

当 μ 给定后，取 $\lambda_1=1-\varepsilon>\mu_1$, 这里 $\varepsilon>0$, 于是由上式就决定了 x，这时 $0<x<1$. 然后由上式可得到对应的 $\lambda_2,\cdots,\lambda_m$. 于是(1.7.32)成为

$$\left|\det \frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right| \geqslant \frac{1}{(1-(1-\epsilon)\mu_1)^{m(m+n)}}$$

$$\times \exp\left\{\frac{-2m(m+n)(1-\epsilon-(1-\epsilon)^2\mu_1)}{[2(1-\epsilon)-\mu_1-(1-\epsilon)^2\mu_1]}\right.$$

$$\left.\times \frac{(1-\epsilon)\mu_1}{(1-(1-\epsilon)\mu_1)}\right\}.$$

令 $\epsilon\to 0$，上式成为

$$\left|\det \frac{\partial F}{\partial W}(\mu)\right| \geqslant \frac{1}{(1-\mu_1)^{m(m+n)}}\exp\left\{\frac{-m(m+n)\mu_1}{1-\mu_1}\right\}.$$

应用证明定理1.7.1中的方法，可得如下定理[1.15]：

定理1.7.4 若 $F\in\mathfrak{B}^0$，$\mathrm{d}(F)=1$，$\det \dfrac{\partial F}{\partial W}(0)=1$，则

$$\left|\det \frac{\partial F}{\partial W}(W)\right| \geqslant (1-\|W\|_M)^{-m^2-mn}\exp\left\{\frac{-m(m+n)\|W\|_M}{1-\|W\|_M}\right\}, \tag{1.7.34}$$

这里 $\|W\|_M$ 为矩阵范数，$W\in R_I$.

当 $m=1$时，R_I 成为 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球 B^n，此时(1.7.34)已为刘向阳所证明[1.40]. 当 $m=1,n=1$时，R_I 成为 $\mathbf{C}$ 中单位圆 Δ，(1.7.34)式就是 Liu-Minda 的结果[1.41]. 应用引理1.7.1，即可得如下定理：

定理1.7.5 若 F 为 R_I 上的局部双全纯映照，$F:R_I\to\mathbf{C}^{m\times n}$，$F\in\mathfrak{B}^0(R_I)$，$\mathrm{d}(F)=1$，$\det \dfrac{\partial F}{\partial Z}(0)=1$，$\|F\|_B\leqslant K$，

则

$$r(O,F)\geqslant C(K,m,n)$$

$$=K^{1-mn}\int_0^1 \frac{(1+t)^{mn-1}}{(1-t)^{m^2+1}}\exp\left\{\frac{-m(m+n)t}{1-t}\right\}\mathrm{d}t.$$

证 如同定理1.7.1的证明那样，可得到：

$$r(O,F)\geqslant \left|\int_\Gamma \mathrm{d}W\right| = \int_\gamma \left|\frac{\partial F}{\partial Z}\cdot\frac{\mathrm{d}Z'}{|\mathrm{d}Z|}\right||\mathrm{d}Z|$$

$$\geqslant \int_{\gamma} \frac{\left|\det \frac{\partial F}{\partial Z}\right| \cdot |\mathrm{d}Z|}{\left\|\frac{\partial F}{\partial Z}\right\|_M^{mn-1}}.$$

由(1.7.34)及(1.7.21)，上式右端不小于

$$\int_0^1 (1-\|Z\|_M)^{-m^2-mn} \exp\left\{\frac{-m(m+n)\|Z\|_M}{1-\|Z\|_M}\right\} \times \frac{(1-\|Z\|_M^2)^{mn-1}}{K^{mn-1}} \mathrm{d}|Z|.$$

令

$$\begin{aligned} l(Y) &= (1-Y)^{-m^2-mn} \exp\left\{\frac{-m(m+n)Y}{1-Y}\right\}(1-Y^2)^{mn-1} \\ &= (1-Y)^{-m^2-1}(1+Y)^{mn-1} \exp\left\{\frac{-m(m+n)Y}{1-Y}\right\}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} l'(Y) = {} & (1-Y)^{-m^2-3}(1+Y)^{mn-2} \exp\left\{\frac{-m(m+n)Y}{1-Y}\right\} \\ & \times [-2(m^2+1) + (-2mn - m^2 + 2)Y \\ & + (m^2+mn)Y^2] < 0, \end{aligned}$$

当 $0 \leqslant Y \leqslant 1$. 也即当 $0 \leqslant Y \leqslant 1$ 时，$l(Y)$ 为递减函数，由于 $|Z| \geqslant \|Z\|_M$，故得到

$$r(O,F) \geqslant K^{1-mn} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{mn-1}}{(1-t)^{m^2+mn}} \exp\left\{\frac{-m(m+n)t}{1-t}\right\} \mathrm{d}t.$$

应用 Landau 定理(定理1.5.2)及例1.7.26，即得如下定理[1.15]：

定理1.7.6 映照族 $\mathfrak{B}_K^0(R_I)$ 的 Bloch 常数 $B_K^0(R_I)$ 满足如下不等式：

$$\begin{aligned} K^{1-mn} &\geqslant B_K^0(R_I) \\ &\geqslant K^{1-mn} \int_0^1 \frac{(1+t)^{mn-1}}{(1-t)^{m^2+1}} \exp\left\{\frac{-m(m+n)t}{1-t}\right\} \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.7.35}$$

当 $m=1$ 时,R_I 成为 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球 B^n,本定理已为刘向阳所证明[1.40]. 当 $m=1$, $n=1$ 时,R_I 成为 $\mathbf{C}$ 中单位圆 Δ,而(1.7.35)就是 $B_0\geqslant\frac{1}{2}$. 这是 Ahlfors 著名的结果[1.1],[1.52].

在这一节中,我们只是讨论了第一类典型域上的全纯映照的 Bloch 常数,对于其他三类典型域,即第二、第三、第四类典型域,可以用相同的方法求得相应映照族的 Bloch 常数.

§1.8 有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数

在上一节中,讨论了第一类典型域上全纯映照的 Bloch 常数,用的是分析的方法. 当然,这些讨论同样可以用来研究其他几类典型域. 在这一节中,应用李代数的观点讨论一般的不可约的有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数,可以得到十分一般的结果.

若 $D\subset\mathbf{C}^n$ 为不可约有界对称域,包含有原点,且为标准的 Harish-Chandra 实现. G 为 D 的全纯自同构群中包含有幺元的连通分支,K 为 G 在 O 点的迷向子群,则 G 是一个连通、非紧且有有限中心的实半单李群,K 是 G 的一个极大紧子群,G/K 是一个与 D 全纯同构的非紧型 Hermite 对称空间. 若 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数,$\mathfrak{k}$ 是对应于 K 的 $\mathfrak{g}$ 中的子代数,则 $\mathfrak{g}$ 是一个非紧、半单、实李代数,而 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的极大紧子代数. 若 $\mathfrak{g}^c$ 是 $\mathfrak{g}$ 的复化,σ 是 $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{g}$ 的复共轭,则一定存在 $\mathfrak{g}^c$ 的另一个复共轭 τ,适合 $\sigma\tau=\tau\sigma$,且 τ 决定了与 $\mathfrak{g}$ 对应的 $\mathfrak{g}^c$ 的一个紧实型 u,适合 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$, $u=\mathfrak{k}+i\mathfrak{p}$,且是 $\mathfrak{g}$ 和 u 对应的 Cartan 分解. 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数,$\mathfrak{k}^c$、$\mathfrak{p}^c$、$\mathfrak{h}^c$ 是 $\mathfrak{k}$、$\mathfrak{p}$、$\mathfrak{h}$ 的复化. 若 $\mathfrak{h}^c$ 是复 r 维,r 称为 $\mathfrak{g}^c$ 的复秩. 于是 $\mathfrak{g}^c$ 有直和分解

$$\mathfrak{g}^c=\mathfrak{h}^c+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}^\alpha,$$

这里 Δ 为 $\mathfrak{h}^c$ 在 $\mathfrak{g}^c$ 上伴随表示的根系,$\mathfrak{g}^\alpha$ 称为根 $\alpha\in\Delta$ 的根子空间. $\mathfrak{g}^\alpha$ 由根 α 唯一决定,且是复一维的. α 可看作 $\mathfrak{h}^c$ 上复线性泛函,它对 $H\in\mathfrak{h}^c$ 作用后,所得的值记作 $\alpha(H)$. 对 $\alpha(H)$ 可在 $\mathfrak{h}^c$ 中找到 H_α,使得 $\alpha(H)=B(H_\alpha,H)$ 对每个 $H\in\mathfrak{h}^c$ 都成立,这里 $B(,)$ 为

Killing 型. 所有 $H_\alpha,\alpha\in\Delta$ 在 $\mathfrak{h}^c$ 中张成实 r 维线性子空间,记作 $\mathfrak{h}_R$.

当 G/K 为 Hermite 对称空间时,$\mathfrak{k}$ 的 Cartan 子代数也是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数,取前面的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{k}$ 的 Cartan 子代数时,由于 $\mathfrak{g}^\alpha$ 在 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}^c$ 之下的不变性,及$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k},[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$,必有 $\mathfrak{g}^\alpha\subset\mathfrak{k}^c$ 或 $\mathfrak{g}^\alpha\subset\mathfrak{p}^c$. 若 $\mathfrak{g}^\alpha\subset\mathfrak{k}^c$,则称 $\alpha(\in\Delta)$为紧根,记紧根的全体为 Δ_C. 若$\mathfrak{g}^\alpha\subset\mathfrak{p}^c$,则称 $\alpha(\in\Delta)$为非紧根,记非紧根的全体为 ϕ. 在 $\mathfrak{h}_R$ 中建立次序,用 ϕ^+ 表示所有非紧正根的集合,于是 $\mathfrak{p}^c$ 可分解为 $\mathfrak{p}^c=\mathfrak{p}_++\mathfrak{p}_-$, 这里

$$\mathfrak{p}_+=\sum_{\beta\in\phi^+}\mathfrak{g}^\beta,\quad \mathfrak{p}_-=\sum_{-\beta\in\phi^+}\mathfrak{g}^\beta.$$

取 $\mathfrak{g}^c$ 关于 $\mathfrak{h}^c$ 的 Weyl 基为:

$$\{H_1,\cdots,H_l,E_\alpha,\alpha\in\Delta\},\ H_j\in\mathfrak{h}_R,\ l=\dim\mathfrak{h}_R,$$

则与 $\mathfrak{g}$ 对应的 $\mathfrak{g}^c$ 的紧实型 u 的一组基为:

$$\{iH_1,\cdots,iH_l,E_\alpha-E_{-\alpha},i(E_\alpha+E_{-\alpha}),\alpha\in\Delta^+\}.$$

那末对应于 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$, 即可得 $\mathfrak{p}$ 的一组基为:

$$\{E_\alpha+E_{-\alpha},i(E_\alpha-E_{-\alpha}),\alpha\in\phi^+\}.$$

若 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{p}$ 的一个极大交换子空间,其实维数为 r,r 为 $\mathfrak{g}$ 的实秩,也称为对称空间 G/K 的秩. 若 α、$\beta\in\Delta$,且 $\alpha\pm\beta\notin\Delta$,则称 α 和 β 为强正交的. 在 ϕ^+中可选出 r 个正根:$\gamma_1,\cdots,\gamma_r$,它们是强正交的,而 $\mathfrak{a}=\sum_{j=1}^{r}R(E_{\gamma_j}+E_{-\gamma_j})$. 考虑 $\mathfrak{a}$ 的复化 $\mathfrak{a}^c$,$\mathfrak{a}^c$ 在 $\mathfrak{g}^c$ 上的伴随表示,用 $\mathfrak{g}_{0,0}$表示 $\mathfrak{a}^c$ 的伴随表示的零权空间,Σ 为 $\mathfrak{a}^c$ 的伴随表示所有非零权的集合. 对 $\lambda\in\Sigma$,$\mathfrak{g}_{0,\lambda}$表示 $\mathfrak{a}^c$ 在 $\mathfrak{g}^c$ 中的伴随表示权为 λ 的权子空间. 显然,$\mathfrak{h}^c\subset\mathfrak{g}_{0,0}$,而每个根子空间 $\mathfrak{g}^\alpha$ $(\alpha\in\Delta)$或是 $\mathfrak{g}_{0,0}$的子空间,或是某个 $\mathfrak{g}_{0,\lambda}$的子空间. 当 $\mathfrak{g}^\alpha\subset\mathfrak{g}_{0,\lambda}$时,用$\bar{\alpha}$表示 $\alpha\in\Delta$ 限制于 $\mathfrak{a}^c$ 上所得的权,即 $\mathfrak{g}^\alpha\subset\mathfrak{g}_{0,\lambda}\Leftrightarrow\bar{\alpha}=\lambda$. 故 Σ 就是 Δ 限制在 $\mathfrak{a}^c$ 上时所有非零权的集合. 称 Σ 为限制根系,而 $\mathfrak{g}_{0,\lambda}$, $\lambda\in\Sigma$ 的复维数就是 Δ 中 $\bar{\alpha}=\lambda$ 的根 α 的个数,记作 m_λ,称它为限制根 λ 的重数. 令

$$e_\alpha = \sqrt{\frac{2}{\alpha(H_\alpha)}}E_\alpha,\ h_\alpha = \sqrt{\frac{2H_\alpha}{\alpha(H_\alpha)}},\ e_{-\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\alpha(H_\alpha)}}E_{-\alpha},\ \alpha \in \Delta^+,$$

则有

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha,\ [h_\alpha, e_{\pm\alpha}] = \pm 2e_{\pm\alpha},\ \alpha \in \Delta^+,$$

且有 $\tau e_\alpha = -e_{-\alpha}$, $\alpha \in \Delta$,于是

$$\mathfrak{p}_\pm = \sum_{\alpha\in\Psi^+} Ce_{\pm\alpha},\ \mathfrak{g}^C = \mathfrak{p}_- + \mathfrak{k}^c + \mathfrak{p}_+.$$

记

$$e_j = e_{\gamma_j},\ h_j = h_{\gamma_j}\ \ (1 \leqslant j \leqslant r),\ e = \sum_1^r e_j,$$

计算 $\mathfrak{g}^c$ 在 ad$\mathfrak{a}$ 之下的限制根系. 对不可约的非紧型 Hermite 对称空间来说,它的限制根系 Σ 只有下述两种可能:

1) $\Sigma = \left\{\pm\frac{1}{2}\gamma_i \pm \frac{1}{2}\gamma_j (1\leqslant i,j\leqslant r),\ \pm\gamma_j (1\leqslant j\leqslant r)\right\}$;

2) $\Sigma = \left\{\pm\frac{1}{2}\gamma_i \pm \frac{1}{2}\gamma_j (1\leqslant i,j\leqslant r), \pm\frac{1}{2}\gamma_j, \pm\gamma_j (1\leqslant j\leqslant r)\right\}$.

对每一个取定的限制根系,所有形如 $\pm\frac{1}{2}\gamma_i \pm \frac{1}{2}\gamma_j$ 的限制根的重数是相等的,记作 a;所有形如 $\pm\frac{1}{2}\gamma_j$ 的限制根的重数是相等的,记作 b;所有形如 $\pm\gamma_j$ 的限制根的重数也是相等的为1,r 为 G/K 的秩,则 r、a、b 为在双全纯映照下的三个解析不变量,由 D 所决定. 反之,当 r、a、b 决定了,不可约有界对称域在双全纯等价意义下,也就唯一决定了(见文献[1.35]). 不可约有界对称域 D 的亏格(genus)定义为

$$p = (r-1)a + b + 2. \tag{1.8.1}$$

在文献[1.35]中,Korányi 具体地给出了四类典型域及二类例外域的 p 的值. 这是研究不可约有界对称域的一个重要的常数. 当然,这也是一个在双全纯映照下的解析不变量.

D 中任一点 z 可以表为 $z = k\sum_{j=1}^r \lambda_j e_j$, $k\in K$, $0\leqslant\lambda_j<1$, $j=1,\cdots,r$. 记 $h(z)$ 为 $\mathfrak{p}_+$ 中的 K-不变多项式,满足

$$h\left(\sum_{j=1}^{r}\lambda_j e_j\right)=\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2).$$

于是有

$$h(z,w)=\exp\sum_{1}^{n}z_j\frac{\partial}{\partial z_j}\exp\sum_{1}^{n}\overline{w}_j\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}h(z). \qquad (1.8.2)$$

也是一个多项式，且对 z 全纯，对 w 反全纯，于是 D 的 Bergman 核函数可表为（见文献[1.16]）：

$$K(z,\overline{w})=h(z,w)^{-p}, \qquad (1.8.3)$$

这里 $h(z,w)$ 由(1.8.2)所定义，p 由(1.8.1)所定义．以$\underline{m}\geqslant 0$表示数组$\underline{m}=(m_1,\cdots,m_r)\in \mathbf{Z}^r$，其中 $m_1,\cdots,m_r$ 为非负整数，且 $m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_r$，对任一复数 ξ，定义

$$(\xi)_{\underline{m}}=\prod_{j=1}^{r}\left(\xi-\frac{j-1}{2}a\right)_{m_j}, \qquad (1.8.4)$$

这里$(C)_k=\prod_{l=1}^{k}(c+l-1)$，$(C)_0=1$．对任一个 j $(1\leqslant j\leqslant r)$，以 I_j 表示$(\underbrace{1,\cdots,1}_{j\text{个}},0,\cdots,0)$．于是由(1.8.4)，有

$$(-1)_{I_j}=(-1)^j\prod_{l=1}^{j}\left(1+(l-1)\frac{a}{2}\right).$$

若 $P(\mathfrak{p}^+)$表示 $\mathfrak{p}^+$上的全纯多项式组成的空间，这可分解为不可约子空间 $P(\mathfrak{p}^+)=\bigoplus_{\underline{m}\geqslant 0}\mathfrak{p}_{\underline{m}}$，而 $\mathfrak{p}_{\underline{m}}$的维数为（文献[1.16]）：

$$d_{\underline{m}}=\left(\frac{\prod_{j=1}^{r}B\left(m_j,(r-j)\frac{a}{2}+1+2b\right)}{B\left(m_j,(r-j)\frac{a}{2}+1\right)}\right)^{-1}$$

$$\times\prod_{1\leqslant p<q\leqslant r}\frac{m_p-m_q+\frac{a}{2}(p-q)}{\frac{a}{2}(q-p)}$$

$$\times\frac{B\left(m_p-m_q,\frac{a}{2}(q-p+1)+1\right)}{B\left(m_p-m_q,\frac{a}{2}(q-p+1)\right)}. \qquad (1.8.5)$$

对于$\underline{m}\geqslant 0$,若 $K^{\underline{m}}(z,w)$为 $\mathfrak{p}_{\underline{m}}$的生成核,则对所有的$\xi\in\mathbf{C}$,$z$、$w\in D$,有(见文献[1.16])

$$h(z,w)^{-\xi}=\sum_{\underline{m}\geqslant 0}(\xi)_{\underline{m}}K^{\underline{m}}(z,w). \tag{1.8.6}$$

这里$(\xi)_{\underline{m}}$由(1.8.4)所定义,D中的每一个z可表示为

$$z=k\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i,\ 0\leqslant\lambda_i<1,\ 1\leqslant i\leqslant r;\ k\in K.$$

记$\lambda=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i$, 令$\lambda^2=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2 e_i$. 对于$\underline{m}\geqslant 0$, $\varphi_{\underline{m}}$为球多项式,则(见文献[1.16])

$$K^{\underline{m}}(z,\bar{z})=\frac{d_{\underline{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\underline{m}}}\varphi_{\underline{m}}(\lambda^2), \tag{1.8.7}$$

这里$z=k\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i$, $n=\dim\mathfrak{p}^{+}$.

由于不可能用太多的篇幅,有关李代数的知识,请参阅文献[1.31]、[1.61]、[1.16]. 有了这些准备后,就可以对不可约有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数进行讨论了. 但需要下列一些引理.

对所有$\underline{m}\geqslant 0$, 如果$m_1>1$, 则有$(-1)_{\underline{m}}=0$. 作为(1.8.6)的推论,有:

引理1.8.1　$h(z,w)=\sum_{j=0}^{r}(-1)_{I_j}K^{I_j}(z,w).$　　(1.8.8)

由(1.8.7)知:

$$K^{I_j}(z,z)=\frac{d_{I_j}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{I_j}}\varphi_{I_j}(\lambda^2).$$

由(1.8.5),经过计算,得

$$\frac{d_{I_j}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{I_j}}=\frac{\prod_{l=1}^{j}(r-l+1)}{j!\prod_{l=1}^{j}\left[1+(l-1)\frac{a}{2}\right]}\quad(j=1,2,\cdots,r). \tag{1.8.9}$$

若 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in D$，记 $E=\sum_{i=1}^{n}z_i\frac{\partial}{\partial z_i}$，则有：

引理1.8.2 $$(EK)(z,z)=p\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)^{-(p+1)}\times\left[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2\prod_{j\neq i}^{r}(1-\lambda_j^2)\right],$$

这里 $z=k\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i$.

证 $K^{I_j}(z,z)$为 z 的 j 次多项式 $(j=1,\cdots,r)$. 由(1.8.8)及 Euler 等式，有

$$(Eh)(z,z)=\sum_{j=1}^{r}(-1)_{I_j}jK^{I_j}(z,z).$$

由(1.8.4)、(1.8.7)及(1.8.9)，$(Eh)(z,z)$ 等于

$$\sum_{j=1}^{r}j(-1)^j\prod_{l=1}^{j}\left[1+(l-1)\frac{a}{2}\right]\frac{d_{I_j}}{\binom{n}{r}_{I_j}}\varphi_{I_j}(\lambda^2)$$

$$=\sum_{j=1}^{r}(-1)^j j\frac{\prod_{l=1}^{j}[r-l+1]}{j!}\varphi_{I_j}(\lambda^2)$$

$$=\sum_{j=1}^{r}(-1)^j j\binom{r}{j}\varphi_{I_j}(\lambda^2).$$

再由(1.8.3)，有

$$\begin{aligned}(EK)(z,z)&=E(h(z,z)^{-p})\\&=(-p)h(z,z)^{-p-1}(Eh)(z,z)\\&=(-p)h(z,z)^{-(p+1)}\sum_{j=1}^{r}(-1)^j j\binom{r}{j}\varphi_{I_j}(\lambda^2).\end{aligned}\tag{1.8.10}$$

令 $S_j(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ $(j=1,\cdots,r)$为 j 次基本对称多项式，则对每个 j，有

$$\varphi_{I_j}(\lambda)=\frac{1}{\binom{r}{j}}S_j(\lambda_1,\cdots,\lambda_r).$$

由于 $h(z,z)=\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)$，由(1.8.10)即得

$$(EK)(z,z)=(-p)\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)^{-(p+1)}$$
$$\times\Big[\sum_{j=1}^{r}(-1)^j jS_j(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_r^2)\Big].$$

余下来要证的是：

$$\sum_{j=1}^{r}(-1)^j jS_j(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_r^2)=-\sum_{j=1}^{r}\lambda_i^2\prod_{j\neq i}^{r}(1-\lambda_j^2).\tag{1.8.11}$$

这只要考虑 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\prod_{i=1}^{r}(1-s\lambda_i)|_{s=1}$. 一方面，这等于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big[\sum_{j=1}^{r}(-1)^j S_j(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)s^j\Big]_{s=1}$$
$$=\sum_{j=1}^{r}(-1)^j jS_j(\lambda_1,\cdots,\lambda_r).$$

另一方面，这又等于

$$-\lambda_1\prod_{i=2}^{r}(1-\lambda_i)-\cdots-\lambda_r\prod_{i=1}^{r-1}(1-\lambda_i)$$
$$=-\Big[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\prod_{j\neq i}^{r}(1-\lambda_j)\Big].$$

故(1.8.11)成立. 这就证明了引理1.8.2.

令　$\lambda=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i\in D$，$-1<\lambda_i<1$　$(i=1,\cdots,r)$.

记 λ_m 为连接0到 λ 的测地线的中点. 令

$$c_i=\operatorname{arctanh}\lambda_i\quad(i=1,\cdots,r).$$

定义 $\gamma(t)=\sum_{i=1}^{r}(\tanh tc_i)e_i$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则 $\gamma(t)$ 为 D 中的测地线(相对于 Bergman 度量)，且 $\gamma(0)=0$，$\gamma(1)=\lambda$ 及 $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\lambda_m$. 令 φ_λ 为 D 的全纯自同构，使得 $\varphi_\lambda(\lambda_m)=\lambda_m$，$\varphi_\lambda^2=$恒等变换. λ_m 为 D 的孤立不动点.

在 $\mathfrak{k}$ 的中心选元素 Z，使得在 $\mathfrak{p}$ 上的复结构 J 为 $J=\mathrm{ad}(Z)|\mathfrak{p}$. 于是 $\exp(\pi Z)\in K$，且作用在 D 上为 $-\mathrm{id}$（id 为恒等变换）.

引理1.8.3 若 $\lambda=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i\in D$ $(-1<\lambda_i<1, i=1,\cdots,r)$，则 φ_λ 可表为

$$\varphi_\lambda=g(\exp\pi Z)g^{-1}, \tag{1.8.12}$$

这里 $g=\exp\sum_{i=1}^{r}\frac{c_i}{2}X_i$，而 $X_i=e_{\gamma_i}+e_{-\gamma_i}$.

证 因为 $\exp\pi Z=-\mathrm{id}$ 对0对称，只要证 $g^{-1}\lambda_m=0$. 根据 Korányi-Wolf的引理3.5[1.37]，若 $g=\exp\sum_{i=1}^{r}t_iX_i$，$z=\sum_{i=1}^{r}b_ie_i$，则

$$gz=\sum_{i=1}^{r}\frac{b_i\cosh t_i+\sinh t_i}{b_i\sinh t_i+\cosh t_i}e_i. \tag{1.8.13}$$

但
$$g^{-1}=\exp\left(-\sum_{i=1}^{r}\frac{c_i}{2}X_i\right),\quad c_i=\tanh^{-1}\lambda_i,$$

以及
$$\lambda_m=\gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{i=1}^{r}\left(\tanh\frac{1}{2}c_i\right)e_i,$$

所以
$$g^{-1}\lambda_m=\sum_{i=1}^{r}\frac{\tanh\frac{1}{2}c_i\cosh\left(-\frac{c_i}{2}\right)+\sinh\left(-\frac{c_i}{2}\right)}{\tanh\frac{1}{2}c_i\sinh\left(-\frac{c_i}{2}\right)+\cosh\left(-\frac{c_i}{2}\right)}e_i=0.$$

引理1.8.4 若 $\lambda=\sum_{i=1}^{r}\lambda_ie_i$，$0\leqslant\lambda_i<1$，$-1<t<1$，则

$$\varphi_\lambda(t\lambda)=\sum_{i=1}^{r}\frac{(1-t)\lambda_i}{1-t\lambda_i^2}e_i. \tag{1.8.14}$$

证 令 $t_i=-c_i/2$ $(i=1,\cdots,r)$. 根据(1.8.12)，有

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(t\lambda)&=g(\exp\pi Z)g^{-1}\cdot t\sum_{i=1}^{r}\lambda_ie_i\\&=\exp\left(-\sum_{i=1}^{r}t_iX_i\right)\exp\pi Z\exp\left(\sum_{i=1}^{r}t_iX_i\right)t\sum_{i=1}^{r}\lambda_ie_i.\end{aligned}$$

由(1.8.13)，这等于

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{r}t_iX_i\right)\exp\pi Z\sum_{i=1}^{r}\frac{t\lambda_i\cosh t_i+\sinh t_i}{t\lambda_i\sinh t_i+\cosh t_i}e_i.$$

由于 $\exp\pi Z=-\mathrm{id}$，故这又等于

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{r}t_iX_i\right)\sum_{i=1}^{r}\left[-\frac{t\lambda_i\cosh t_i+\sinh t_i}{t\lambda_i\sinh t_i+\cosh t_i}e_i\right].$$

而由(1.8.13)，这又等于

$$\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{-\dfrac{\lambda_i\cosh t_i+\sinh t_i}{\lambda_i\sinh t_i+\cosh t_i}\cosh t_i-\sinh t_i}{\dfrac{t\lambda_i\cosh t_i+\sinh t_i}{t\lambda_i\sinh t_i+\cosh t_i}\sinh t_i+\cosh t_i}\right]e_i$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(-1)\frac{t\lambda_i\cosh^2t_i+\sinh t_i\cosh t_i+t\lambda_i\sinh^2t_i+\sinh t_i\cosh t_i}{t\lambda_i\sinh t_i\cosh t_i+\sinh^2t_i+t\lambda_i\sinh t_i\cosh t_i+\cosh^2t_i}e_i$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(-1)\frac{t\lambda_i\cosh 2t_i+\sinh 2t_i}{t\lambda_i\sinh 2t_i+\cosh 2t_i}e_i$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(-1)\frac{t\lambda_i+\tanh 2t_i}{t\lambda_i\tanh 2t_i+1}e_i$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(-1)\frac{t\lambda_i-\lambda_i}{-t\lambda_i^2+1}e_i$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\frac{(1-t)\lambda_i}{1-t\lambda_i^2}e_i.$$

对任一 $z\in D$，则 z 可表为 $z=k\sum_{i=1}^{r}\mu_ie_i$，$k\in K$，$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_r\geqslant0$，且定义 $\|z\|=\mu_1$. 易证 $\|kz\|=\|z\|$ 对每个 $k\in K$ 都成立.

若 F 为 D 上的 Bloch 映照，且有 Bloch 范数 $\|F\|_B$，若 $\lambda\in D$，$\varphi_\lambda(z)$ 将原点映为 λ 的 D 上的全纯自同构，则

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\lambda)=\frac{\partial}{\partial z}(F\circ\varphi_\lambda)(0)\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial z}(0)\right)^{-1}.$$

于是

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial z}(\lambda)\right\|_M\leqslant\|F\|_B\left\|\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial z}(0)\right)^{-1}\right\|_M,$$

这里$\|\cdot\|_M$为矩阵的范数. 由 J. Arazy[1.7]的结果,得

$$\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial z}(z) = -B(\lambda,\lambda)^{\frac{1}{2}}B(z,\lambda)^{-1}, \qquad (1.8.15)$$

这里 $B(z,\lambda)$为 Begman 算子. 于是

$$\left\|\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial z}(0)\right)^{-1}\right\|_M = \|B(\lambda,\lambda)^{-1/2}\|_M.$$

经直接计算可得:对任一 $\lambda\in D$,有

$$\|B(\lambda,\lambda)^{-1/2}\|_M = \frac{1}{1-\|\lambda\|^2}. \qquad (1.8.16)$$

于是证明了如下引理:

引理1.8.5 若 $F:D\to \mathbf{C}^n$ 为不可约有界齐性域 D 上的 Bloch 映照,则

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial z}(\lambda)\right\|_M \leqslant \frac{\|F\|_B}{1-\|\lambda\|^2}$$

对每个 $\lambda\in D$ 都成立.

(1.6.12)的左端为

$$\frac{\det \left.\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial z}\right|_{z=t\lambda}}{\det \left.\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial z}\right|_{z=\lambda}}.$$

由(1.8.3)及(1.8.15),

$$\det\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial z} = (-1)^n K(z,\lambda)K(\lambda,\lambda)^{-\frac{1}{2}} = (-1)^n h(z,\lambda)^{-p}h(\lambda,\lambda)^{\frac{p}{2}}. \qquad (1.8.17)$$

若 $\lambda=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i, \lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant 0$, $-1<t<1$, 则

$$h(\lambda,\lambda)=\prod_{i=1}^{r}(1-\lambda_i^2), \qquad (1.8.18)$$

$$h(t\lambda,\lambda)=\prod_{i=1}^{r}(1-t\lambda_i^2). \qquad (1.8.19)$$

由(1.8.17)、(1.8.18)及(1.8.19)得到

$$\frac{\det \dfrac{\partial \varphi_\lambda}{\partial z}\bigg|_{z=t\lambda}}{\det \dfrac{\partial \varphi_\lambda}{\partial z}\bigg|_{z=\lambda}} = \frac{\prod_{i=1}^{r}(1-\lambda_i^2)^p}{\prod_{i=1}^{r}(1-t\lambda_i^2)^p}. \tag{1.8.20}$$

有了这些准备之后，我们就可以在 D 为不可约有界对称域时来具体计算(1.6.13)式.

由引理1.8.2，若 $\lambda=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i$，$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant 0$，则

$$(EK)(\lambda,\lambda)=p\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)^{-(p+1)}\Big[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2\prod_{j\neq i}(1-\lambda_j^2)\Big],$$

而

$$K(\lambda,\lambda)=h(\lambda,\lambda)^{-p}=\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)^{-p}.$$

这就有

$$(EK)(\lambda,\lambda)+K(\lambda,\lambda)=\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)^{-(p+1)}\Big\{\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)+p\Big[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2\prod_{j\neq i}(1-\lambda_j^2)\Big]\Big\}, \tag{1.8.21}$$

$$(EK)(\lambda,\lambda)-K(\lambda,\lambda)=-\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)^{-(p+1)}\Big\{\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)-p\Big[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2\prod_{j\neq i}(1-\lambda_j^2)\Big]\Big\}. \tag{1.8.22}$$

将(1.8.20)及(1.8.21)、(1.8.22)代入(1.6.13)，就有如下引理：

引理1.8.6　若 $F:D\to\mathbb{C}^n$ 为不可约有界对称域 D 上的全纯映照，$\lambda=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i\in D$，$-1<t<1$，$F\in\mathfrak{B}(D)$，即 F 为 D 上的 Bloch 映照. $\mathrm{d}(F)=1$，$\det\dfrac{\partial F}{\partial z}(0)=1$，$\varphi_\lambda(z)$ 为将 λ 映到原点的 D 上的全纯自同构，则 $\mathfrak{Re}\left\{\det\dfrac{\partial F}{\partial z}(\varphi_\lambda(t\lambda))\right\}$ 不小于

$$\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)^p\cdot\left(\left\{\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)+p\Big[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\prod_{j\neq i}(1-\lambda_j^2)\Big]\right\}t\right.$$

$$+\left\{\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)-p\left[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2\prod_{j\neq i}(1-\lambda_j^2)\right]\right\}\Bigg)$$

$$\div\left(\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)^p\left[\left\{\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)\right.\right.\right.$$

$$\left.+p\left[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2\prod_{j\neq i}(1-\lambda_j^2)\right]\right\}+\left\{\prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)\right.$$

$$\left.\left.\left.-p\left[\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2\prod_{j\neq i}(1-\lambda_j^2)\right]\right\}t\right]\right). \tag{1.8.23}$$

若 $-1<t<1$，令

$$\mu_i=\frac{(1-t)\lambda_i}{1-t\lambda_i^2}, \tag{1.8.24}$$

则 $\varphi_\lambda(t\lambda)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i e_i=\mu$. 于是$1>\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_r\geqslant0$. 而(1.8.23)成为

$$\Re e\left\{\det\frac{\partial F}{\partial z}(\mu)\right\}\geqslant\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{(1-\lambda_j\mu_j)^p}\cdot\frac{(t+1)-p\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i\mu_i}{1-\lambda_i\mu_i}}{(t+1)+p\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i\mu_i}{1-\lambda_i\mu_i}}. \tag{1.8.25}$$

但是

$$(t+1)-p\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i\mu_i}{1-\lambda_i\mu_i}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\lambda_i-\mu_i}{\lambda_i(1-\lambda_i\mu_i)}+1\right)$$

$$-p\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i\mu_i}{1-\lambda_i\mu_i}=\sum_{i=1}^{r}\frac{2\lambda_i-\mu_i-(pr+1)\lambda_i^2\mu_i}{r\lambda_i(1-\lambda_i\mu_i)}.$$

取 $\lambda_1=(pr+1)^{-\frac{1}{2}}$,则 $0<\mu_1<\frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1^2}=\frac{2(pr+1)^{1/2}}{pr+2}$，反过来,如果给定 $\mu_1,\cdots,\mu_r$ 满足如下关系：

$$\frac{2(pr+1)^{1/2}}{pr+2}>\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_r\geqslant0,$$

则可选取适当的 t 及 $\lambda_1=(pr+1)^{-1/2},\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 满足 $-1<t<1$及 $(pr+1)^{-1/2}=\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant0$. 而 λ_i 和 μ_i 之间满足关系式(1.8.24). 显然,这只要取

$$t=\frac{(pr+1)^{1/2}(1-\mu_1(pr+1)^{1/2})}{(pr+1)^{1/2}-\mu_1}. \qquad (1.8.26)$$

当$0<\mu_1<\frac{2(pr+1)^{1/2}}{pr+2}$时，由上式所取的$t$满足$-1<t<1$. 取定$t$后，由(1.8.24)可得$\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，所以只要证明$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant 0$即可. 在(1.8.24)中去掉指标，由于$t$是常数，故$\lambda$和$\mu$之间有关系式

$$t=\frac{\lambda-\mu}{\lambda(1-\lambda\mu)}. \qquad (1.8.27)$$

即λ为μ的函数. 在(1.8.27)式对μ求导数，得

$$\lambda'=\frac{1}{\mu}\,\frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\mu+\lambda^2}.$$

由于$0\leqslant\mu<1$，$0\leqslant\lambda<1$，故$\lambda'\geqslant 0$. 即λ为μ的单调增加函数. 因此，$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\geqslant 0$，若$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_r\geqslant 0$.

回顾(1.8.25)，其右端分式的分母显然为正的，而

$$\frac{\lambda_1\mu_1}{1-\lambda_1\mu_1}\geqslant\cdots\geqslant\frac{\lambda_r\mu_r}{1-\lambda_r\mu_r}\geqslant 0.$$

从上述不等式及(1.8.26)及(1.8.25)得到如下引理：

引理1.8.7 若D为$\mathbf{C}^n$中的不可约有界对称域，$F\in\mathfrak{B}(D)$，$\mathrm{d}(F)=1$，$\det\frac{\partial F}{\partial z}(0)=1$，$\mu=\sum_{i=1}^{r}\mu_i e_i\in D$，$\mu_1\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_r\geqslant 0$，则当$\mu_1<\frac{2\sqrt{pr+1}}{pr+2}$时，

$$\Re e\left\{\det\frac{\partial F}{\partial z}(\mu)\right\}\geqslant\frac{1-\sqrt{pr+1}\,\mu_1}{\left(1-\frac{\mu_1}{\sqrt{pr+1}}\right)^{pr+1}} \qquad (1.8.28)$$

成立.

证 (1.8.25)的右端还可写成：

$$\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{(1-\lambda_j\mu_j)^p}\cdot\frac{(t+1)+pr-p\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}}{(t+1)-pr+p\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}}. \qquad (1.8.29)$$

固定一个 i，令 $x=\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i}$，

$$A=t+1+pr-p\sum_{j\neq i}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j},$$

$$B=t+1-pr+p\sum_{j\neq i}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j},$$

则(1.8.29)可表为

$$\prod_{j\neq i}\frac{1}{(1-\lambda_j\mu_j)^p}x^p\frac{A-px}{B+px}.$$

令

$$f(x)=x^p\frac{A-px}{B+px},$$

则

$$f'(x)=\frac{px^{p-1}}{(B+px)^2}[AB+((p-1)A-(p+1)B)x-p^2x^2].$$

令 $Q=\sum_{j\neq i}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}$，则

$$\begin{aligned}&AB+((p-1)A-(p+1)B)x-p^2x^2\\&=(t+1)(t+1-2x)-p^2(r-Q-x)^2.\end{aligned}$$

由于 $x=\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i}$，故由(1.8.24)，取 $t=\frac{\lambda_i-\mu_i}{\lambda_i-\lambda_i^2\mu_i}$，这样

$$t+1-2x=\frac{\lambda_i-\mu_i}{\lambda_i-\lambda_i\mu_i^2}+1-\frac{2}{1-\lambda_i\mu_i}=-\frac{\mu_i(1+\lambda_i^2)}{\lambda_i(1-\lambda_i\mu_i)}\leqslant 0,$$

故 $f'(x)\leqslant 0$. 由于 $\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i}\leqslant\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}$，因之，在(1.8.29)中以 $\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}$ 替代 $\frac{1}{1-\lambda_i\mu_i}$，则其值不增. 所以(1.8.29)不小于

$$\frac{1}{(1-\lambda_1\mu_1)^{pr}}\cdot\frac{t+1+pr-pr\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}}{t+1-pr+pr\frac{1}{1-\lambda_1\mu_1}}.$$

以 $t=\frac{\lambda_1-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_1^2\mu_1}$ 及 $\lambda_1=(1+pr)^{-\frac{1}{2}}$ 代入上式，即得(1.8.28).

若 $z\in D$，则 z 可表为 $z=k\sum_{i=1}^{r}\mu_ie_i, 1>\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_r\geqslant 0, k\in K$.

固定 k，令 $\mu=\sum_{i=1}^{r}\mu_i e_i$，则 $z=k\mu$，令

$$G(\mu)=F(k\mu)\left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^{-1},$$

则 $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ 与 μ 无关. 因此 $\frac{\partial G}{\partial \mu}=\frac{\partial F}{\partial z}$. 于是 $\det\frac{\partial G}{\partial \mu}=\det\frac{\partial F}{\partial z}$. 如果

$$F\in\mathfrak{B}(D),\ \mathrm{d}(F)=1,\ \det\frac{\partial F}{\partial z}(0)=1,$$

则 G 也满足这些条件，即 $G\in\mathfrak{B}(D)$，$\mathrm{d}(G)=1$，$\det\frac{\partial G}{\partial \mu}(0)=1$. 于是由引理1.8.7，就有如下定理[1,25]：

定理1.8.1(Bonk 偏差定理)　若 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的不可约有界对称域，$F\in\mathfrak{B}(D)$，$\mathrm{d}(F)=1$，$\det\frac{\partial F}{\partial z}(0)=1$，$z=k\sum_{i=1}^{r}\mu_i e_i\in D$，$k\in K$，则

$$\Re\left\{\det\frac{\partial F}{\partial z}(z)\right\}\geqslant\frac{1-\sqrt{pr+1}\,\|z\|}{\left(1-\frac{\|z\|}{\sqrt{pr+1}}\right)^{pr+1}},\tag{1.8.30}$$

当 $\|z\|<\frac{2\sqrt{pr+1}}{pr+2}$ 时成立，这里 $\|z\|=\mu_1$.

定理1.8.1可以看作 Bonk 偏差定理在不可约有界对称域上的推广. 应用这个引理，可以得到以下的一条关于 $\mathfrak{B}_K(D)$ 的 Bloch 常数的下界的估计的定理[1,25]：

定理1.8.2　$\mathfrak{B}_K(D)$ 的 Bloch 常数 $B(\mathfrak{B}_K(D))$ 满足以下的不等式：

$$K^{1-n}\geqslant B(\mathfrak{B}_K(D))\geqslant K^{1-n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{pr+1}}}\frac{(1-\sqrt{pr+1}\,t)(1-t^2)^{n-1}}{\left(1-\frac{t}{\sqrt{pr+1}}\right)^{pr+1}}\mathrm{d}t.\tag{1.8.31}$$

证　若 $F\in\mathfrak{B}_K(D)$，由于 $\det\frac{\partial F}{\partial z}(0)=1$ 及 $F(0)=0$，D 在 F 的象中包有原点，且包有以原点为中心的一个小球. 这个小球可以扩充，直到球面遇到 D 在 F 的象的边界或 $\det\frac{\partial F}{\partial z}=0$. 由引理

1.7.2，此小球的半径就是 $r(O,F)$. 由定理1.8.1，当 $\|z\|<\frac{1}{\sqrt{pr+1}}$ 时，$\det\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$. 在 D 于 F 的象域中，取一条直线 Γ，由原点出发到一点，这点的原象或在 D 的边界上，或是 $\det\frac{\partial F}{\partial z}=0$. 显然

$$r(O,F)=\left|\int_\Gamma \mathrm{d}W\right|=\int_\Gamma|\mathrm{d}W|=\int_\gamma\left|\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z'}{|\mathrm{d}z|}\right|\cdot|\mathrm{d}z|,$$

这里 $\gamma=F^{-1}(\Gamma)$. 但是

$$\int_\gamma\left|\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z'}{|\mathrm{d}z|}\right||\mathrm{d}z|\geqslant\int_\gamma\left|\det\frac{\partial F}{\partial z}\right|\cdot\left\|\frac{\partial F}{\partial z}\right\|_M^{1-n}|\mathrm{d}z|. \tag{1.8.31'}$$

由引理1.8.5及定理1.8.1，上式右端大于或等于

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{pr+1}}}\frac{1-\sqrt{pr+1}\|z\|}{\left(1-\frac{\|z\|}{\sqrt{pr+1}}\right)^{pr+1}}\cdot\frac{(1-\|z\|^2)^{n-1}}{K^{n-1}}\mathrm{d}|z|. \tag{1.8.32}$$

令 $c=\sqrt{pr+1}$，$x=\|z\|$，$g(x)=\dfrac{(1-cx)(1-x^2)^{n-1}}{\left(1-\frac{x}{c}\right)^{c_2}}$，

于是当 $x\leqslant\frac{1}{c}$ 时，

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{(1-x^2)^{n-2}}{\left(1-\frac{x}{c}\right)^{c^2+1}}\Big[(1-c^2)x(1-x^2)\\&\quad-2(n-1)x\left(1-\frac{x}{c}\right)(1-cx)\Big]\\&=\frac{(1-x^2)^{n-2}}{\left(1-\frac{x}{c}\right)^{c^2+1}}\Big[-prx(1-x^2)\\&\quad-2(n-1)x\left(1-\frac{x}{c}\right)(1-cx)\Big]\leqslant 0.\end{aligned}$$

由于 $|z|\geqslant\|z\|$，故(1.8.32)大于或等于

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{pr+1}}} \frac{(1-\sqrt{pr+1}t)(1-t^2)^{n-1}}{\left(1-\frac{t}{\sqrt{pr+1}}\right)^{pr+1} K^{n-1}} \mathrm{d}t.$$

这就证明了(1.8.31)的右端的不等式.

从文献[1.35]及[1.32]可知道:所有不可约有界对称域全纯等价于四类典型域及两个例外域,所以可以十分具体地写出在这些域上 $\mathfrak{B}_K(D)$ 的 Bloch 常数 B_K 的估计式.

对于第一类典型域 $R_I: I-Z\overline{Z}'>0$, $Z=Z^{(m,n)}, 1\leqslant m\leqslant n$; 这时 $p=n+m, r=m$,代入(1.8.31)就得到(1.7.27).

对于第二类典型域 $R_{II}: I-Z\overline{Z}'>0$, $Z=Z'=Z^{(n)}$; 这时 $p=n+1$, $r=n$,而 $(pr+1)^{\frac{1}{2}}=(n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}$,代入(1.8.31)就得到

$$B(\mathfrak{B}_K(R_{II}))\geqslant K^{-\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$$

$$\times\int_0^{(n^2+n+1)^{-1/2}} \frac{(1-(n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}t)(1-t^2)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}}{\left(1-\frac{t}{(n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}}\right)^{n^2+n+1}} \mathrm{d}t.$$

对于第三类典型域 $R_{III}: I+Z\overline{Z}>0, Z=-Z'=Z^{(n)}$;这时 $p=2n-2$, $r=\left[\frac{n}{2}\right]$, 于是当 n 为偶数时, $(pr+1)^{\frac{1}{2}}=(n^2-n+1)^{\frac{1}{2}}$,代入(1.8.31)就得

$$B(\mathfrak{B}_K(R_{III}))\geqslant K^{\frac{-(n+1)(n-2)}{2}}$$

$$\times\int_0^{(n^2-n+1)^{-1/2}} \frac{(1-(n^2-n+1)^{\frac{1}{2}}t)(1-t^2)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}}{\left(1-\frac{t}{(n^2-n+1)^{\frac{1}{2}}}\right)^{n^2-n+1}} \mathrm{d}t.$$

当 n 为奇数时,$(pr+1)^{\frac{1}{2}}=(n^2-2n+2)^{\frac{1}{2}}$,代入(1.8.31)就得到

$$B(\mathfrak{B}_K(R_{III}))\geqslant K^{-\frac{(n+1)(n-2)}{2}}$$

$$\times\int_0^{(n^2-2n+2)^{-1/2}} \frac{(1-(n^2-2n+2)^{\frac{1}{2}}t)(1-t^2)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}}{\left(1-\frac{t}{(n^2-2n+2)^{\frac{1}{2}}}\right)^{n^2-2n+2}} \mathrm{d}t.$$

对于第四类典型域 R_{IV}：$1+|ZZ'|^2-2Z\overline{Z}'>0, 1-|ZZ'|>0$；这时 $p=n$，$r=2$，而 $(pr+1)^{\frac{1}{2}}=(2n+1)^{\frac{1}{2}}$，代入(1.8.31)就得到

$$B(\mathfrak{B}_K(R_{IV}))\geqslant K^{1-n}\int_0^{(2n+1)^{-\frac{1}{2}}}\frac{(1-(2n+1)^{\frac{1}{2}}t)(1-t^2)^{n-1}}{\left(1-\dfrac{t}{(2n+1)^{\frac{1}{2}}}\right)^{2n+1}}\mathrm{d}t.$$

对于维数为16的例外域 R_V，这时 $p=12$，$r=2$，而 $(pr+1)^{\frac{1}{2}}=5$，代入(1.8.31)就得到

$$B(\mathfrak{B}_K(R_V))\geqslant K^{-15}\int_0^{\frac{1}{5}}\frac{(1-5t)(1-t^2)^{15}}{\left(1-\dfrac{t}{5}\right)^{25}}\mathrm{d}t.$$

对于维数为27的例外域 R_{VI}，这时 $p=18$，$r=3$，而 $(pr+1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{55}$，代入(1.8.31)就得

$$B(\mathfrak{B}_K(R_{VI}))\geqslant K^{-26}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{55}}}\frac{(1-\sqrt{55}t)(1-t^2)^{26}}{\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{55}}\right)^{55}}\mathrm{d}t.$$

至于 $B(\mathfrak{B}_K)$ 的上界的估计，可以取 F 为：$F=(KZ_1,\cdots,KZ_{n-1},K^{1-n}Z_n)$ $(1\leqslant K<\infty)$. 于是可以对各类不可约的有界对称域加以验证，$F\in\mathfrak{B}_K(D)$，而可得 $K^{1-n}\geqslant B(\mathfrak{B}_K(D))$.

以上讨论了不可约有界对称域上全纯映照的 Bloch 常数.

如同在前面所进行的那样，对于不可约有界对称域 D 上的局部双全纯映照族，也可以有相应的定理[1.20]：

定理1.8.3(偏差定理) 若 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的不可约有界对称域，$F\in\mathfrak{B}^0(D)$，$\mathrm{d}(F)=1$，$\det\dfrac{\partial F}{\partial z}(0)=1$，$z=k\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i e_i\in D$，$k\in K$，则

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial z}(z)\right|\geqslant(1-\|z\|)^{-pr}\exp\left\{\frac{-pr\|z\|}{1-\|z\|}\right\}\quad(1.8.33)$$

成立，这里 $\|z\|=\mu_1$.

定理1.8.4 $\mathfrak{B}_K^0(D)$ 的 Bloch 常数 $B^0(\mathfrak{B}_K^0(D))$ 满足以下的不等式：

$$K^{1-n} \geqslant B^0(\mathfrak{B}_K^0(D)) \geqslant K^{1-n}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n-1}}{(1-t)^{pr}}\exp\left\{\frac{-prt}{1-t}\right\}dt. \tag{1.8.34}$$

以上两定理的证明 首先考虑点 $z=\lambda=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i\in D$,则

$$K(\lambda,\bar{\lambda}) = \prod_{j=1}^{r}(1-\lambda_j^2)^{-p}.$$

将此结果及(1.8.20)与引理1.8.2一起代入(1.6.17),就得到

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial w}(\varphi_\lambda(x\lambda))\right| \geqslant \prod_{j=1}^{r}\left(\frac{1-x\lambda_j^2}{1-\lambda_j^2}\right)^p \times\exp\left\{\frac{-2p(1-x)}{1+x}\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i^2}{1-\lambda_i^2}\right\}. \tag{1.8.35}$$

但由引理1.8.4及公式(1.8.14)知:当 $-1<x<1$ 时,

$$\varphi_\lambda(x\lambda) = \sum_{i=1}^{r}\frac{(1-x)\lambda_i}{1-x\lambda_i^2}e_i.$$

令

$$\mu_i = \frac{(1-x)\lambda_i}{1-x\lambda_i^2}\quad(i=1,2,\cdots,r), \tag{1.8.36}$$

则

$$\prod_{j=1}^{r}\frac{1-x\lambda_j^2}{1-\lambda_j^2} = \prod_{j=1}^{r}\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}.$$

于是(1.8.35)成为

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial w}(\mu)\right| \geqslant \prod_{j=1}^{r}\frac{1}{(1-\lambda_j\mu_j)^p}\exp\left\{\frac{-2p(1-x)}{1+x}\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i^2}{1-\lambda_i^2}\right\}. \tag{1.8.37}$$

但由(1.8.36)知

$$\frac{(1-x)\lambda_j^2}{1-\lambda_j^2} = \frac{\lambda_j\mu_j}{1-\lambda_j\mu_j}\quad(j=1,\cdots,r).$$

于是(1.8.37)成为

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial w}(\mu)\right| \geqslant \prod_{j=1}^{r}\left[\frac{1}{1-\lambda_j\mu_j}\exp\left\{\frac{-2}{1+x}\frac{\lambda_j\mu_j}{1-\lambda_j\mu_j}\right\}\right]^p. \tag{1.8.38}$$

函数

$$f(Y)=\frac{1}{1-Y}\exp\left\{\frac{-2}{1+x}\frac{Y}{1-Y}\right\}$$

的导数当 $0\leqslant Y<1$，$-1<X<1$ 时，

$$f'(Y)=\frac{(1+x)(1-Y)-2}{(1-Y)^3(1+x)}\exp\left\{\frac{-2}{1+x}\frac{Y}{1-Y}\right\}<0.$$

由 $\lambda_1\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r\mu_r$ 及 $f(Y)$ 的递减性质，从(1.8.38)可得

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial w}(\mu)\right|\geqslant\frac{1}{(1-\lambda_1\mu_1)^{rp}}\exp\left\{\frac{-2pr}{1+x}\frac{\lambda_1\mu_1}{1-\lambda_1\mu_1}\right\}. \tag{1.8.39}$$

取定 μ 后，取 $\varepsilon>0$，使得 $1-\varepsilon>\mu_1$. 令 $\lambda_1=1-\varepsilon$，$x=\frac{1-\varepsilon-\mu_1}{1-\varepsilon-(1-\varepsilon)^2\mu_1}$. 再由(1.8.36)来决定 $\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，于是(1.8.39)成为

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial w}(\mu)\right|\geqslant\frac{1}{(1-(1-\varepsilon)\mu_1)^{rp}}$$

$$\times\exp\left\{\frac{-2pr(1-\varepsilon-(1-\varepsilon)^2\mu_1)(1-\varepsilon)\mu_1}{[2(1-\varepsilon)-\mu_1-(1-\varepsilon)^2\mu_1](1-(1-\varepsilon)\mu_1)}\right\}.$$

令 $\varepsilon\to0$，则得

$$\left|\det\frac{\partial F}{\partial w}(\mu)\right|\geqslant\frac{1}{(1-\mu_1)^{rp}}\exp\left\{\frac{pr\mu_1}{1-\mu_1}\right\}. \tag{1.8.40}$$

如同定理1.8.1中那样，若 $z=k\sum_{i=1}^{r}\mu_ie_i\in D$，$1>\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_r\geqslant0$，$k\in K$，令 $\mu=\sum_{i=1}^{r}\mu_ie_i$，则 $z=k\mu$. 令 $G(\mu)=F(k\mu)\left(\frac{\partial Z}{\partial\mu}\right)^{-1}$，则 $\frac{\partial G}{\partial\mu}=\frac{\partial F}{\partial z}$. 于是证明了定理1.8.3.

至于定理1.8.4的证明，如同定理1.8.2的证明那样，只要以引理1.8.5及(1.8.40)代入(1.8.31′)，就可得到

$$r(O,F)\geqslant\int_0^1\frac{1}{(1-\|z\|)^{rp}}$$

$$\times\exp\left\{\frac{-pr\|z\|}{1-\|z\|}\right\}\frac{(1-\|z\|^2)^{n-1}}{K^{n-1}}\mathrm{d}|z|.$$

令 $l(x)=(1-x)^{-c}\exp\left\{\frac{-cx}{1-x}\right\}(1-x^2)^{n-1}$，则当 $0\leqslant x<1$，$c>0$ 及 $n\geqslant 1$ 时，

$$l'(x)=-l(x)\frac{c(1-x)x+2(n-1)x}{(1-x)^2(1+x)}\leqslant 0.$$

于是

$$r(O,F)\geqslant K^{1-n}\int_0^1\frac{(1-t^2)^{n-1}}{(1-t)^{rp}}\exp\left\{\frac{-prt}{1-t}\right\}dt.$$

这就证明了(1.8.34)的右端的不等式.至于左端的不等式,已在定理1.8.2中证明了.

对于第一类典型域 $R_{\rm I}:I-Z\overline{Z}'>0$，$Z=Z^{(m,n)}(1\leqslant m\leqslant n)$，这时$p=n+m$，$r=n$，代入(1.8.34)，就得(1.7.37).

对于第二类典型域 $R_{\rm II}:I-Z\overline{Z}'>0, Z=Z'=Z^{(n)}$，这时 $p=n+1$，$r=n$，代入(1.8.34)就得到

$$B^0(\mathfrak{B}_K^0(R_{\rm II}))\geqslant K^{\frac{-(n+2)(n-1)}{2}}\int_0^1\frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}}{(1-t)^{n(n+1)}}\times\exp\left\{\frac{-n(n+1)t}{1-t}\right\}dt$$

$$=K^{\frac{-(n+2)(n-1)}{2}}\int_0^1\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}}{(1-t)^{\frac{1}{2}(n^2+n+2)}}\times\exp\left\{\frac{-n(n+1)t}{1-t}\right\}dt.$$

对于第三类典型域 $R_{\rm III}:I+Z\overline{Z}>0$，$Z=-Z'=Z^{(n)}$，这时 $p=2n-2$，$r=\left[\frac{n}{2}\right]$，于是，当 n 为偶数时，$pr=n(n-1)$；当 n 为奇数时，$pr=(n-1)^2$. 代入(1.8.34)，就得到：当 n 为奇数时，有

$$B^0(\mathfrak{B}_1^0(R_{\rm III}))\geqslant K^{\frac{-(n+1)(n-2)}{2}}\int_0^1\frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}(n+1)(n-2)}}{(1-t)^{n(n-1)}}\times\exp\left\{\frac{-n(n-1)t}{1-t}\right\}dt$$

$$=K^{\frac{-(n+1)(n-2)}{2}}\int_0^1\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}(n+1)(n-2)}}{(1-t)^{\frac{1}{2}(n^2-n+2)}}$$

$$\times \exp\left\{\frac{-n(n-1)t}{1-t}\right\}\mathrm{d}t;$$

当 n 为偶数时，有

$$B^0(\mathfrak{B}_K^0(R_{\mathrm{III}}))\geqslant K^{\frac{-(n+1)(n-2)}{2}}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}(n+1)(n-2)}}{(1-t)^{(n-1)^2}}$$

$$\times \exp\left\{\frac{-n(n-1)t}{1-t}\right\}\mathrm{d}t$$

$$= K^{\frac{-(n+1)(n-2)}{2}}\int_0^1 \frac{(1+t)^{\frac{1}{2}(n+1)(n-2)}}{(1-t)^{\frac{1}{2}(n^2-3n+4)}}$$

$$\times \exp\left\{\frac{-n(n-1)t}{1-t}\right\}\mathrm{d}t.$$

对于第四类典型域 R_{IV}：$1+|ZZ'|^2-2Z\overline{Z}'>0$，$1-|ZZ'|>0$. 这时 $p=n$，$r=2$，代入(1.8.34)，就有

$$B^0(\mathfrak{B}_K^0(R_{\mathrm{IV}}))\geqslant K^{1-n}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n-1}}{(1-t)^{2n}}\exp\left\{\frac{-2nt}{1-t}\right\}\mathrm{d}t$$

$$= K^{1-n}\int_0^1 \frac{(1+t)^{n-1}}{(1-t)^{n+1}}\exp\left\{\frac{-2nt}{1-t}\right\}\mathrm{d}t.$$

对于维数为16的例外域 R_{V}，这时 $p=12$，$r=2$，代入(1.8.34)就得

$$B^0(\mathfrak{B}_K^0(R_{\mathrm{V}}))\geqslant K^{-15}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{15}}{(1-t)^{24}}\exp\left\{\frac{-24t}{1-t}\right\}\mathrm{d}t$$

$$= K^{-15}\int_0^1 \frac{(1+t)^{15}}{(1-t)^{9}}\exp\left\{\frac{-24t}{1-t}\right\}\mathrm{d}t.$$

对于维数为27的例外域 R_{VI}，这时 $p=18$，$r=3$，代入(1.8.34)就得到

$$B^0(\mathfrak{B}_K^0(R_{\mathrm{VI}}))\geqslant K^{-26}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{26}}{(1-t)^{54}}\exp\left\{\frac{-54t}{1-t}\right\}\mathrm{d}t$$

$$= K^{-26}\int_0^1 \frac{(1+t)^{26}}{(1-t)^{28}}\exp\left\{\frac{-54t}{1-t}\right\}\mathrm{d}t.$$

参考文献

[1.1] Ahlfors L V. An extension of Schwarz's lemma. Tran Amer Math. Soc, 1938, 43:359~364

[1.2] Ahlfors L V. Conformal invariants, Topics in geometric function theory, McGraw-Hill, 1973

[1.3] Anderson J M, Clunie J G and Pommerenke Ch. On Bloch functions and normal functions. J. Reine Angew. Math, 1974, 270:12~37

[1.4] Arazy J and Fisher S D. Invariant Hilbert spaces of analytic functions on bounded symmetric domains. Topics in operator theory, Emst D. Hellinger memorial volume, 67~91, Operator theory Adv Appl 48, Borkhäuser, Basel. 1990

[1.5] Ahlfors L V and Grunsky H. Über die Blochsche Konstante, Math Z, 1937, 42: 671~673

[1.6] Arazy J. Realization of the invariant inner products on the highest quotients of the decomposition series. Ark Mat, 1992, 30:1~24

[1.7] Arazy J. Integral formulas for the invariant inner products in spaces of analytic functions on the unit ball, Function spaces, 9~23, Lecture Notes in Pure and Appl Math, 136, Dekker, 1992

[1.8] Ахиезер Н и. Элементы теории Элиптических функций, 1948, ГиТп 刘书琴、纪豫译, 商务印书馆, 1956

[1.9] Bochner S. Bloch theorem for real variables, Bull Amer Math Soc, 1946, 52:715

[1.10] Bonk M. On Bloch's constants, Proc Amer Math Soc, 1990, 110:889~894

[1.11] Chern Shiing Shen. On holomorphic mappings of Hermitian manifolds of the same dimension. Proc Sym Pure Math 11, Entire functions and related parts of analysis, 1968, 157~170. Selected papers: 347~360. Springer Verlag, 1978

[1.12] Duren P L and Rudin W. Distortion in several variabies, Complex Variables, 1986, 5:323~326

[1.13] Finkelstein M. Growth estimates of convex functions. Proc Amer Math Soc, 1967, 18:412~418

[1.14] FitzGerald C H and Gong S. The Bloch theorem in several complex variables, Journal of Geometric Analysis. 1994, 4:35~58

[1.15] FitzGerald C H and Gong S. The locally biholomorphic Bloch constant and Morden constant of several complex variables, Computational methods and function theory, 1994 (Ali R M. St Ruscheweyh and Saff E B Eds) Series in

approximations and decompositions, Vol 5, 1995, World Scientific Publishing Co: 147～158

[1.16] Faraut J and Korányi A. Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains, Journal of Functional Analysis, 1990, 88: 64～89

[1.17] 龚昇.简明复分析.北京大学出版社,1996

[1.18] 龚昇.多复变数的凸映照与星形映照,纯粹数学与应用数学丛书第34号.科学出版社,1995

[1.19] 龚昇.多连通区域的 Bloch 常数.数学学报,1957,7:513～519

[1.20] Gong S. The Bloch constant of locally biholomorphic mappings on bounded symmetric domains, Chinese Annals of Math, 1996, 17B: 271～278

[1.21] Goluzin G M. Geometric theory of functions of a complex variable, Transl of Math Monograph, V. 26, Amer Math Soc, 1969

[1.22] Gronwall T H. On the distortion in conformal mapping when the second coefficient in the mapping function has an assigned value, Proc Nat Acad Sci. USA 1920, 6: 300～302

[1.23] Graham I. Bloch constants in one and several variables, Pacific J of Math

[1.24] Greene R E and Wu H. Bloch's theorem for meromorphic functions, Math Z, 1970, 116: 247～257

[1.25] Gong S and Yan Z M. Bloch constant of holomorphic mappings on bounded symmetric domains, Science in China (Series A), 1993, 36: 285～299
严志敏,龚昇.有界对称域上的全纯映照的 Bloch 常数.中国科学,1992,22: 1121～1134

[1.26] Hahn K T. High dimensional generalizations of the Bloch constant and their lower bounds, Tran Amer Math Soc, 1973, 179: 263～274

[1.27] Hahn K T. Holomorphic mappings of the hyperbolic space into the complex Euclidean space and the Bloch theorem. Canad J Math, 1975, 27: 446～458

[1.28] Hahn K T. Quantitative Bloch's theorem for certain classes of holomorphic mappings of the ball in P_nC. J Reine Angew Math, 1976, 283: 99～109

[1.29] Harris L A. On the size of balls covered by analytic transformations, Monatschefte für Mathematik, 1977, 83: 9～23

[1.30] Heins M. On a class of conformal metrics, Nagoya Math J, 1962, 21: 1～60

[1.31] Helgason S. Differential geometry. Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, 1978

[1.32] Hua L K. Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, Transl of Math Monograph V6, Amer Math Soc, 1963

[1.33] Jenkins J A. On the schlicht Bloch constant. J Math Mech, 1961, 10: 729～734

[1.34] Jenkins J A, On a problem of Gronwall, Ann of Math, 1954, 59: 490～504

[1.35] Korányi A. Analytic invariants of bounded symmetric domains, Proc. Amer Math Soc, 1968, 19: 279～284

[1.36] Krantz S G and Ma D W. *Bloch functions on strongly prsendoconvex domains*, Indiana Univ. Math J, 1988, 37: 145～163

[1.37] Korányi A and Wolf J A. Realization of hermitian symmetric spaces as generalized halfplanes, Ann. of Math, 1965, 81: 265～288

[1.38] Landau E. Der Picord-Schottkysche Satz and die Blochsche Konstante, Sitzungsber. Preuss Akad, Wiss Berlin, Phys-Math Kl. 1926. 467～474

[1.39] Landau E. Über die Blochsche Konstante and zwei verwandte Welt konstanten, Math Z, 1929, 30: 608～634

[1.40] Liu X Y. Bloch functions of several complex variables, Pacific Jour of Math, 1992, 152: 347～363

[1.41] Liu X Y and Minda D. Distortion theorems for Bloch functions, Tran Amer Math Soc, 1992, 333: 325～338

[1.42] Minda D. Bloch constants. J Analyse Math, 1982, 41: 54～84

[1.43] Minda D. Marden constants for Bloch and normal functions. J Analyse Math, 1982/83, 42: 117～127

[1.44] Minda D. The Bloch and Marden constant, Computational Methods and Function Theory, Proceeding, Lecture Notes in Math. 1435, 131～142, Springer-Verlag, 1990

[1.45] Minda D. Lower bounds for the hyperbolic metric in convex regions. Rocky Mtn J Math, 1983, 13: 61～69

[1.46] Minda D. Bloch constants for meromorphic functions. Math Z, 1982, 181: 83～92

[1.47] Minda D. The hyperbolic metric and Bloch constants for spherical convex regions, Complex Variables, 1986, 5: 127～140

[1.48] Minda D. Domain Bloch constants, Tran. Amer Math Soc, 1983, 276: 645～655

[1.49] Minda D. Bloch constants for meromorphic functions near isolated singularity. Proc Amer Math Soc, 1984, 91: 69～72

[1.50] Peschl E. Über die Verwendung von Differential invarienten hei gewissen Funktionen familien and die Über tragung einer darauf gegründeten Methode auf partialle Differential gleichungen vom elliptische Typus, Ann Acad Sci Fenn Ser AINO. 1963, 336/6: 23

[1.51] Peschl E. Über unverzweigte konforme Abbildungen, Österreich. Akad Wiss Math-Naturwiss Kl S-B Ⅱ, 1976, 185:55~78

[1.52] Pommerenke Ch. On Bloch functions, J London Math Soc (2) 1970, 2:689~695

[1.53] Reich E. On a Bloch-Landau constant, Proc Amer Math Soc, 1956, 7:75~76

[1.54] Robinson R M. The Bloch constant for a schlicht function, Bull Amer Math Soc, 1935, 41:535-540

[1.55] Ruhel L A and Timoney R M. An extremal property of the Bloch space, Proc Amer Math Soc, 1979, 75:45~50

[1.56] Szegö G. Über eine Extremalauf gabe aus der Theorie der schlichten Abbildungen Sitzungs berichte der Berliner Mathematische Gesellschaft, 1923, 22:38~47

[1.57] Takahashi. Shin-chi. Univalent mappings in several complex variables, Ann of Math, 1951, (2) 53:464~471

[1.58] Timoney R M. Bloch functions in several complex variables Ⅰ, Bull. London Math. Soc 12 (1980)241-267

[1.59] Timoney R M. Bloch functions in several complex variables Ⅱ, J Reine Angew Math, 1980, 319:1~22

[1.60] Upmeier H. Toeplitz operators on bounded symmetric domains. Tran Amer Math Soc, 1983, 280:221~237

[1.61] 万哲先. 李代数. 科学出版社, 1964

[1.62] 伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步. 北京大学出版社, 1989

[1.63] Wu H. Normal families of holomorphic mappings, Acta Math, 1967, 119:193~233

[1.64] Zhang M Y. Ein Über deckungssatz für Konvexe Gebiete. Acad Sinica Science Record, 1952, 5:17~21

[1.65] Zhang M Y. The Bloch constant for convex conformal mappings (Chinese). Shuxue Jinzhan(Adv. Math)(Chinese), 1955, 1:387~391

第 2 章

Schwarz(许瓦尔兹)导数

§2.1 历 史 回 顾

Schwarz 导数是分析中的一个重要概念，它在共形映照、函数单叶性、拟似共形映照、Teichmüller 空间以及常微分方程等多方面都有着本质性的作用. 由于单复变数函数的 Schwarz 导数的重要性，近年来有不少文献讨论如何将 Schwarz 导数的概念推广到高维空间中. 在这一章中将系统地介绍我们在这方面的工作，在这一节中，先十分简单地回顾一下单复变数函数的 Schwarz 导数.

对于单复变数函数的 Schwarz 导数已有多种观点及途径引入，并加以定义. 以下列举几个：

Schwarz 导数最早是在 1869 年由 H. A. Schwarz 引入的. 当时他考虑如下问题(见文献[2.4]、[2.34])：

由 Riemann 映照定理知道，任一以圆弧为边的三角形，都可以共形映照到一个圆或一个半平面，例如 $\mathrm{Im}z>0$. 若 $u=f(z)$是将上半平面映为这个圆弧三角形的共形映照，将 $0,1,\infty$ 映为这三角形的三个顶点. 线性分式变换

$$w=\frac{af+b}{cf+d}\quad (\text{式中 } a,b,c,d \text{ 为常数，且 } ad-bc\neq 0.) \tag{2.1.1}$$

将 $f(z)$映为 $w(z)$，由于线性分式变换将圆弧映为圆弧. 因之，$w(z)$也将上半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 映为一个圆弧三角形的内部或外部. 这个三角形的顶点为 $w(0)$、$w(1)$及 $w(\infty)$. 任给 w 平面上的三

点，都可以选取常数 a,b,c 及 d，使得 $w(0)$，$w(1)$和 $w(\infty)$与这三点相重合. H. A. Schwarz 讨论了如下的问题：求出一个不依赖于系数 a,b,c,d 的 u,w 及其导数的关系式. 而 Schwarz 导数就是所要求的关系式. 他的做法是用求导来消去常数 a,b,c,d.

由(2.1.1)，求导得

$$w' = \frac{ad-bc}{(cf+d)^2}f',$$

由于 $ad-bc\neq 0$，若 $f'\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln w' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln f' - \frac{2cf'}{cf+d}.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln w' = W,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln f' = U,$$

则有

$$W = U - \frac{2cf'}{cf+d}. \tag{2.1.2}$$

将上式再对 z 求导，就有

$$U' - W' = \frac{2cf''}{cf+d} - \frac{2c^2f'^2}{(cf+d)^2}. \tag{2.1.3}$$

由于 $f'U=f''$ 及 (2.1.2)，有

$$\frac{cf'}{cf+d} = \frac{1}{2}(U-W),$$

代入(2.1.3)，就有

$$U' - W' = U(U-W) - \frac{1}{2}(U-W)^2 = \frac{1}{2}U^2 - \frac{1}{2}W^2.$$

这就得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\ln w' - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln w'\right)^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\ln f' - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln f'\right)^2.$$

记

$$\{f;z\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, \tag{2.1.4}$$

则上式就是

$$\{w;z\} = \{f;z\}. \tag{2.1.5}$$

而(2.1.4)就定义为 f 的 Schwarz 导数，这也可记为 $S[f](z)$ 或 $S_f(z)$. 因之，(2.1.5)也就是

$$S[w](z) = S\left[\frac{af+b}{cf+\mathrm{d}}\right](z) = S[f](z) \tag{2.1.6}$$

及

$$S_w(z) = S_f(z),$$

即 Schwarz 导数经线性分式变换后是不变的.

利用(2.1.5)，可以给出将上半平面映为圆弧三角形的共形映照的具体表达式，这已在第一章 § 1.2 中看到其用处了.

这是 Schwarz 导数的来源.

对 Schwarz 导数也可由另一种观点导出来.

若 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 为域，f 为 Ω 上的全纯函数. 若 $a,b,c,d \in \mathbf{C}$，且 $ad-bc=1$，则称

$$T:T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

为 $\mathbf{C}$ 上的一个 Möbius 变换. 将 T 与 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 相对应，则所有Möbius 变换 T 组成一个李群 $SL(2,\mathbf{C})/\{\pm I\}$，称之为 Möbius 群，记作 Möb($\mathbf{C}$)，这里 I 为单位阵. 对 Ω 中的一点 z_0，要求一个 Möbius 变换 $T_{z_0}(z)$，使得 $T_{z_0}(z)$ 与 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 处有二阶逼近，即

$$T_{z_0}(z_0) = f(z_0),\ T'_{z_0}(z_0) = f'(z_0),\ T''_{z_0}(z_0) = f''(z_0).$$

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时，这样的 T_{z_0}是存在且唯一的. 其解为

$$T_{z_0} = \frac{1}{2f'^{3/2}(z_0)} \times \begin{pmatrix} -f''(z_0)f(z_0)+2(f'(z_0))^2, & z_0f''(z_0)f(z_0)-2z_0(f'(z_0))^2+2f'(z_0)f(z_0), \\ -f''(z_0), & z_0f''(z_0)+2f'(z_0) \end{pmatrix}, \tag{2.1.7}$$

即

$$T_{z_0}(z) = \{(-f''(z_0)f(z_0)+2(f'(z_0))^2)z + z_0f''(z_0)f(z_0)$$

$$- 2z_0(f'(z_0))^2 + 2f'(z_0)f(z_0)\}$$
$$\div \{- f''(z_0)z + z_0 f''(z_0) + 2f'(z_0)\}$$

由(2.1.7)可得

$$\frac{f'''(z_0) - T'''_{z_0}(z_0)}{f'(z_0)} = \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2 = \{f;z_0\}.$$

即 f 的 Schwarz 导数在 $z=z_0$ 的值(见文献[2.5]、[2.24]).

或是考虑

$$(T_{z_0}^{-1} \circ f)(z_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n[f](z_0)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2.1.8)$$

经直接验算可得

$$s_0[f](z_0) = 1,\ s_1[f](z_0) = 0,\ s_2[f](z_0) = \{f;z_0\},$$

即 $s_2[f](z_0)$就是 f 的 Schwarz 导数在 $z=z_0$ 的值. (2.1.8)可写成

$$(T_{z_0}^{-1} \circ f)(z_0 + z) = z_0 + z + \{f;z_0\}\frac{z^3}{3!} + \cdots.$$

由(2.1.8)可以看出,若 T 为任一 Möbius 变换,则

$$s_n[T \circ f](w) = s_n[f](w).$$

当 $n=2$ 时,即为(2.1.6)式. 上式表明 s_n 是 Möbius 变换下的不变量. 因之,定义 s_n 为 f 的高阶 Schwarz 导数. 当 $n=2$,即为由(2.1.4)所定义的 f 的 Schwarz 导数. 关于 f 的高阶 Schwarz 导数的进一步讨论可参阅文献[2.25]和[2.35].

从上述的论述中还可以看出:Schwarz 导数可以用来衡量函数 $f(z)$与 Möbius 变换之间的偏离. 正如 W. P. Thurston 在文献[2.36]中所说的:"Schwarz 导数很像一种曲率. 在微分几何中不同的曲率都是度量曲线及流形与平坦之间的偏离,而 Schwarz 导数是度量一个共形映照与 Möbius 变换之间的偏离".

实际上,可以容易证明:$\{f;z\}=0$ 当且仅当 f 是 Möbius 变换.

如果 f 是 Möbius 变换,容易直接验证$\{f;z\}=0$;反之,若 f 为一个区域 Ω 上局部单叶全纯函数,则由$\{f;z\}=0$ 导出 f 为

Möbius变换. 由于$\{f;z\}=0$,由(2.1.4),令 $y=f''/f'$,$\{f;z\}=0$ 即为 $y'=\frac{1}{2}y^2$. 直接解这个常微分方程,就得

$$y=\frac{f''}{f'}=\frac{-2}{z+d},$$

这里 d 为常数,再次解这个常微分方程,即得 f 是线性分式变换,这可化为 Möbius 变换.

定理 2.1.1 若 f 为在域 Ω 中的局部单叶全纯函数,则$\{f;z\}=0$ 当且仅当 f 为 Möbius 变换.

在上面的讨论中,看到了函数 f 的 Schwarz 导数与 Möhius 变换之间的深刻联系. 而 Möbius 变换群是射影空间 **CP** 的自同构群. **CP** 中最重要的不变量就是交比(cross ratio). 所以第三种观点是由交比引入函数的 Schwarz 导数的.

若 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 为域,$f(z)$在 Ω 上局部单叶全纯,任取点 $z\in\Omega$,α、β、$\gamma\in\mathbf{C}$ 为复常数,$t\in\mathbf{C}$ 为复变数,使得 $z+\alpha t$、$z+\beta t$ 及 $z+\gamma t$ 仍在 Ω 中. 记 $w_1=f(z)$,$w_2=f(z+\alpha t)$,$w_3=f(z+\beta t)$及 $w_4=f(z+\gamma t)$. 这四点的交比为

$$[w_1,w_2,w_3,w_4]=\frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_2-w_3)(w_1-w_4)}.$$

以下具体计算$[w_1,w_2,w_3,w_4]$,为此将 w_2、w_3 及 w_4 对 t 进行展开,于是有

$$w_1-w_3=-\beta t\left(f'+\frac{1}{2}\beta tf''+\frac{1}{6}\beta^2t^2f'''+\cdots\right),$$

$$w_2-w_3=(\alpha-\beta)t\left(f'+\frac{\alpha+\beta}{2}tf''+\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{6}t^2f'''+\cdots\right),$$

$$w_2-w_4=(\alpha-\gamma)t\left(f'+\frac{\alpha+\gamma}{2}tf''+\frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2}{6}t^2f'''+\cdots\right),$$

$$w_1-w_4=-\gamma t\left(f'+\frac{1}{2}\gamma tf''+\frac{1}{6}\gamma^2t^2f'''+\cdots\right).$$

从而即可得到:

$$[w_1,w_2,w_3,w_4]=[0,\alpha,\beta,\gamma]\Big\{1-\alpha(\beta-\gamma)$$

$$\times\left\{\frac{1}{6}\frac{f'''}{f'}-\frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right\}t^2+\cdots\Big\}$$

$$=[0,\alpha,\beta,\gamma]\left\{1-\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{6}\{f;z\}t^2+\cdots\right\}.$$

因之，可以将 f 的 Schwarz 导数定义为交比的无穷小形式. 这个观点在 Ahlfors 的著作[2.1]、[2.2]中有着十分深入的讨论.

此外，还可以用几何的角度引入 Schwarz 导数. 例如 H. F. Flander[2.7]就有如下的讨论：

讨论 **CP** 中的点 x，可以看成二维仿射空间中的点 (x_1,x_2). 点 λx 与 x 看成同一点(若 $\lambda\neq0$). 对其中的任意两点 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$，定义面积函数

$$[x,y]=x_1y_2-x_2y_1.$$

对 **CP** 中的标架包含有两点 x,y 且 $[x,y]=1$. 若 $s\to\{x(s),y(s)\}$ 组成一个标架，即活动标架，这里 $s\in\mathbf{C}$，x、y 为 s 的全纯函数，于是有

$$x'=ax+by,\quad y'=cx+dy$$

为其结构方程. 这里 a、b、c、d 均为 s 的函数. 对 $[x,y]=1$ 求导，就得到 $[x',y]+[x,y']=0$. 因此即得 $a+d=0$. 故活动标架的结构方程为：

$$x'=ax+by,\quad y'=cx-ay.$$

若 $D\subset\mathbf{C}$ 为域，映照 $\phi:D\to\mathbf{CP}$. 现在要选择活动标架 $x(s)$、$y(s)$，使得 $x(s)$ 表示 $\phi(s)$，且使结构方程尽可能简单.

考虑 $b\neq0$ 的情形：选择另一个标架 x_1、y_1 为

$$x=hx_1,\quad y=h^{-1}y_1.$$

这里 h 为待定函数. 若 x_1、y_1 的结构方程为

$$x_1'=a_1x_1+b_1y_1,\quad y_1'=c_1x_1-a_1y_1.$$

于是有

$$x'=h'x_1+ha_1x_1+hb_1y_1.$$

但是已知 $x'=ax+by=ahx_1+bh^{-1}y_1$. 因之，$b=h^2b_1$. 由于 $b\neq0$，故可选取 $h\neq0$，使得 $b_1=1$. 于是可以选择标架 x、y 使得其结构方程

为

$$x' = ax + y,\ y' = cx - ay.$$

再作标架变换

$$x = x_1,\ y = -ax_1 + y_1.$$

于是

$$x_1' = x' = ax + y = y_1,$$

$$y_1' = y' + (ax_1)' = (c + a^2 + a')x_1 = -kx_1,$$

这里 $k = -(c + a^2 + a')$. 因此,可以选择标架,使其结构方程为

$$x' = y,\ y' = -kx.$$

这样的标架的结构方程是最简单的,此标架称为 ϕ 的自然活动标架(natural moving frame).

这里得到的 k 是一个不变量,即若 x_1、y_1 为另一个自然活动标架,使得

$$x_1' = y_1,\ y_1' = -k_1x_1.$$

由于 x、x_1 均表示 $\phi(s)$,故 $x = \lambda x_1$, $\lambda \neq 0$. 因此

$$y = x' = \lambda' x_1 + \lambda y_1,\ 1 = [x, y] = [\lambda x_1, \lambda' x_1 + \lambda y_1] = \lambda^2,$$

于是 $\lambda = \pm 1$, $x_1 = \pm x$, $y_1 = x_1' = \pm x' = \pm y$, $-k_1x_1 = y_1' = \pm y' = \mp kx = -kx_1$. 因此 $k_1 = k$, k 为曲率.

若 ϕ 为 $s \to z(s)$, $x(s)$、$y(s)$ 为其自然标架. 于是 $z = \lambda x, \lambda \neq 0$. 经求导得到:

$$z' = \lambda' x + \lambda y;\ z'' = (\lambda'' - \lambda k)x + 2\lambda' y;$$

$$z''' = (\cdots)x + (3\lambda'' - \lambda k)y.$$

于是

$$[z, z'] = \lambda^2;\ [z, z''] = 2\lambda\lambda';\ [z, z'''] = 3\lambda\lambda'' - \lambda^2 k;$$

$$[z', z''] = 2(\lambda')^2 - \lambda\lambda'' + \lambda^2 k.$$

因此,

$$[z, z'''] + 3[z', z''] = 6(\lambda')^2 + 2\lambda^2 k;$$

$$\frac{[z, z'']^2}{[z, z']} = 4(\lambda')^2;\ [z, z'''] + 3[z', z''] - \frac{3}{2}\frac{[z, z'']^2}{[z, z']} = 2\lambda^2 k.$$

这就得到

$$2k=\frac{[z,z'''] + 3[z',z'']}{[z,z']}-\frac{3}{2}\left(\frac{[z,z'']}{[z,z']}\right)^2.$$

取 **CP** 中的非齐次坐标，$\phi: s \to (1,z(s))=z(s)$. 于是 $z'=(0,z')$，$z''=(0,z'')$，$z'''=(0,z''')$，由此即得

$$[z,z']=z',\ [z,z'']=z'',\ [z,z''']=z''',\ [z',z'']=0.$$

由结构方程，$[x,x']=b$. 故 $b\neq 0$ 相当于 $[z,z']=z'\neq 0$. 于是曲率公式成为

$$2k=\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2.$$

上式右端即为 z 的 Schwarz 导数. 因此 Schwarz 导数可以看成为 **CP** 中曲线的曲率.

若 $k=0$，则结构方程成为

$$x'=y,\ y'=0.$$

因此，$y=b$，$x=a+bs$，$[a,b]=1$. 于是映照 z 就是 $(1,z)=\lambda(a+bs)$，消去 λ，即得 $z=\dfrac{a_2+b_2s}{a_1+b_1s}$，这里 $a=(a_1,a_2)$，$b=(b_1,b_2)$ 均为常向量. 从而得到：若曲率 $k=0$，即 z 的 Schwarz 导数为零，则 z 为Möbius变换. 这也再次证明了定理2.1.1. 进一步的论述参阅文献[2.7].

还有其他很多种观点导出 Schwarz 导数，例如 P. Deligne[2.6] 用射影联络(Projective connection)导出 Schwarz 导数等等，不在这里一一列举了. 在本章中，将以上介绍的几种观点(除去第一种观点)作为出发点来定义高维空间中的映照的 Scbwarz 导数.

下面再叙述一些单复变数函数的 Schwarz 导数的重要性质，以作为今后章节中讨论的背景材料.

若 f 在域 Ω 上局部单叶全纯，且函数 f 在点 z 的值 $f(z)\neq 0$，则由(2.1.4)直接验证，可得

$$S_f(z)=S_{\frac{1}{f}}(z). \tag{2.1.9}$$

因此，可以用上式定义在 Ω 上局部单叶亚纯函数的 Schwarz 导数. 于是定理 2.1.1 对于函数 f 是局部单叶亚纯函数也成立.

此外，若 f,g 为两个局部单叶亚纯函数，且 $f\circ g$ 有意义，则

$$S_{f\cdot g}=S_f(g)g'^2+S_g \tag{2.1.10}$$

成立，只要按定义(2.1.4)直接验证即可证明(2.1.10). 由(2.1.10)即得：

(1) 若 g 为 Möbius 变换，则

$$S_{f\cdot g}=S_f(g)g'^2; \tag{2.1.11}$$

(2) 若 f 为 Möbius 变换，则

$$S_{f\cdot g}=S_g. \tag{2.1.12}$$

而(2.1.12)在前面已经证明了.

此外，由(2.1.7)可知：若 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 为域，f 在 Ω 上为局部单叶亚纯函数，若 $z\in\Omega$，则有 $T_z\in\text{Möb}(\mathbf{C})$，即 T 将 Ω 映到 Möbius 群中：

$$T:\Omega\to\text{Möb}(\mathbf{C}).$$

Möb($\mathbf{C}$)在单位阵 I 处的切空间为李代数

$$\text{möb}(\mathbf{C})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}; a,b,c,d\in\mathbf{C}, a+d=0\right\}.$$

而在点 T_z 处的切空间为 $T_z\cdot\text{möb}(\mathbf{C})$. 因此，若 T_z 对 z 求导记作 DT_z，则 $DT_z=T_zU_z$，于是 U 为将 D 映到李代数 möb($\mathbf{C}$)中，即

$$U:D\to\text{möb}(\mathbf{C}).$$

现在来具体计算 U_z. 由(2.1.7)，将 T_z 中四个元素对 z 求导后，分别得到

$$\frac{1}{2}\left(-f''ff'^{-\frac{3}{2}}+2f'^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{-1}{2}ff'^{-\frac{1}{2}}S_f(z),$$

$$\frac{1}{2}\left(-f'^{-\frac{3}{2}}f''\right)'=\frac{-1}{2}f'^{-\frac{1}{2}}S_f(z),$$

$$\frac{1}{2}\left(zf''f'^{-\frac{3}{2}}f-2zf'^{\frac{1}{2}}+2f'^{-\frac{1}{2}}f\right)'=\frac{1}{2}zff'^{-\frac{1}{2}}S_f(z),$$

以及

$$\frac{1}{2}\left(zf'^{-\frac{3}{2}}f''+2f'^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}zf'^{-\frac{1}{2}}S_f(z),$$

因此

$$(T_z)' = S_f(z)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}ff'^{\frac{-1}{2}}, & \frac{1}{2}zff'^{\frac{-1}{2}} \\ -\frac{1}{2}f'^{\frac{-1}{2}}, & \frac{1}{2}zf'^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix}.$$

而上式右端的方阵等于$\frac{1}{2}T_z\begin{pmatrix} -z & z^2 \\ -1 & z \end{pmatrix}$. 即

$$(T_z)' = \frac{1}{2}T_z\begin{pmatrix} -z & z^2 \\ -1 & z \end{pmatrix}S_f(z) = T_zU_z. \qquad (2.1.13)$$

于是

$$U_z = \frac{1}{2}S_f(z)\begin{pmatrix} -z & z^2 \\ -1 & z \end{pmatrix} \in \ddot{\mathrm{mob}}(\mathbf{C}). \qquad (2.1.14)$$

这就具体地给出了:当 $T_z\in \mathrm{Möb}(\mathbf{C})$时, $U_z\in \ddot{\mathrm{mob}}(\mathbf{C})$ 的具体表达式.

显然,可以定义两个亚纯函数 q 及 r 如下:

$$\begin{pmatrix} q(z) \\ r(z) \end{pmatrix} = T_z\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.1.15)$$

即 $q(z)=ff'^{\frac{-1}{2}}$, $r(z)=f'^{\frac{-1}{2}}$,由于 f 为局部单叶,故 $q(z)$及 $r(z)$ 在 Ω 中有意义. 因此,

$$f(z) = q(z)/r(z).$$

对(2.1.15)求导,由(2.1.13),即得

$$\begin{pmatrix} q'(z) \\ r'(z) \end{pmatrix} = T_zU_z\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} + T_z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由(2.1.14)知 $U_z\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,因此

$$\begin{pmatrix} q'(z) \\ r'(z) \end{pmatrix} = T_z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

再次求导,由(2.1.14)及(2.1.15),即得

$$\begin{pmatrix} q''(z) \\ r''(z) \end{pmatrix} = T_zU_z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_z\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -z \\ -1 \end{pmatrix}S_f(z) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} q(z) \\ r(z) \end{pmatrix}S_f(z).$$

即 q、r 为线性方程 $w''+\frac{1}{2}S_fw=0$ 的两个线性无关的解. 即,如果

Ω 上的亚纯局部单叶函数 f 已给定，则可得 $w''+\frac{1}{2}S_f w=0$ 的两个线性无关的解 w_1 和 w_2，而 $w_1/w_2=f$. 反之，若 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 为单连通域，φ 为 Ω 上的全纯函数，则可找到亚纯局部单叶函数 f，使得 $S_f=\varphi$，而 f 也就是 $w''+\varphi w=0$的两个线性无关的解 w_1 和 w_2的商，即 $w_1/w_2=f$.

定理 2.1.2 若 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 为单连通域，φ 是 Ω 上的全纯函数，则有 Ω 上的亚纯局部单叶函数 f，使得

$$S_f=\varphi \tag{2.1.16}$$

成立，且除了相差一个 Möbius 变换外，(2.1.16)的解是唯一的.

证 将 $y=f''/f'$ 代入(2.1.16)，则(2.1.16)成为 Riccati 方程 $y'-\frac{y^2}{2}=\varphi$. 令 $y=-2w'/w$，方程成为二阶线性方程

$$w''+\frac{1}{2}\varphi w=0. \tag{2.1.17}$$

对于在 Ω 中任一点 z_0，给定 $w(z_0)$及 $w'(z_0)$之后，(2.1.17)在 z_0 的一个邻域有唯一的全纯解，这只要用比较系数法即可得到. 从这个局部解出发，进行解析开拓，使局部解成为一个整体解. 由于 Ω 是单连通的，故开拓不能是多值的. 若 w_1和 w_2为(2.1.17)的两个线性独立的解，则由 $w_1w_2''-w_1''w_2=0$得到 $w_1w_2'-w_1'w_2=c$，这里 c 为常数. 由于 w_1、w_2是线性无关的，故 $c\neq 0$. 令 $f=w_1/w_2$，则 $f'\neq 0$，且有 $f''/f'=-2\frac{w_2'}{w_2}$，故

$$\begin{aligned}S_f&=\left(\frac{f''}{f'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\\&=2(w_2'^2-w_2w_2''-w_2'^2)/w_2^2=-2w_2''/w_2,\end{aligned}$$

由(2.1.17)，得 $S_f=\varphi$. 故 f 就是(2.1.16)的解.

以下证唯一性：

若另有一个 g，使得 $S_g=\varphi$. 由(2.1.10)，有

$$S_f=S_{f\cdot g^{-1}}(g)g'^2+S_g.$$

由于 $S_f=S_g$，故对每一点 $w\in g(\Omega)$有 $S_{f\cdot g^{-1}}(w)=0$. 故由定理 2.1.1，知 $f\circ g^{-1}$为一个 Möbius 变换，即 f 和 g 相差一个 Möbius

变换.

如前所述,Schwarz 导数可以用来刻画亚纯函数与 Möbius 变换的偏离. 为了刻画这种偏离,引入 Schwarz 导数的范数. 若 Ω 为 $\mathbf{C}$ 中边界多于一点的单连通域,f 为 Ω 上局部单叶亚纯函数. 定义

$$\|S_f\|_\Omega = \sup_{z\in\Omega}\{S_f(z)\eta_\Omega^{-2}(z)\}$$

为 f 的 Schwarz 导数 S_f 的范数,式中 η_Ω 为 Ω 的 Poincaré 度量的密度. 若 F 为 Ω 到单位圆 Δ 的共形映照,则 $\eta_\Omega=\dfrac{2|F'(z)|}{1-|F(z)|^2}$.

现在引入如下定理:

定理 2.1.3[2.21],[2.22],[2.26] 若 f 为单位圆 Δ 上单叶全纯函数,则

$$\|f\|_\Delta \leqslant \frac{3}{2}, \tag{2.1.18}$$

等号成立当且仅当 f 为 Köbe 函数及其旋转.

证 若 $\zeta\in\Delta$,则

$$\begin{aligned}h(z)&=\frac{f\left(\dfrac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)-f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)}\\&=z+\left[\frac{1}{2}(1-|\zeta|^2)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\bar{\zeta}\right]z^2+\cdots.\end{aligned}$$

显然有 $h(0)=0$, $h'(0)=1$, h 在 Δ 中为单叶的. 令

$$\begin{aligned}g(z)=\frac{1}{h\left(\dfrac{1}{z}\right)}&=-\left[\frac{1}{2}(1-|\zeta|^2)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\bar{\zeta}\right]\\&\quad+z-\frac{1}{6}(1-|\zeta|^2)^2S_f(\zeta)\frac{1}{z}+\cdots,\end{aligned}$$

则 $g(z)$ 在单位圆 Δ 之外解析,由面积原理(参阅文献[2.10])得

$$\left|\frac{(1-|\zeta|^2)^2}{6}S_f(\zeta)\right|\leqslant 1,$$

此即(2.1.18). 上式等号成立,当且仅当 $g(z)$ 为 $\dfrac{(1-e^{i\theta}z)^2}{z}$,故 $h(z)$ 为 Köbe 函数及其旋转,故 $f(z)$ 也是 Köhe 函数及其旋转.

以下给出：用 Schwarz 导数刻画函数成为单叶的充分条件. 这也是 Nehari 的工作[2.26]，这里给出两条比较一般性的定理[2.27],[2.28]如下：

定理 2.1.4(Nehari)　若 $p(x)$是在$(-1,1)$中定义的正的连续偶函数，又$(1-x^2)^2p(x)$ 在$[0,1)$ 中为单调递减函数，且

$$y''(x)+p(x)y(x)\leqslant 0 \tag{2.1.19}$$

在$(-1,1)$中有解 $y(x)>0$. 若 $f(z)$在单位圆 Δ 中为亚纯函数，且为局部单叶函数，并有

$$|S_f(z)|\leqslant 2p(|z|) \tag{2.1.20}$$

对 $z\in\Delta$ 都成立，则 f 在 Δ 中为单叶函数.

取 $p(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$，则 $y=\sqrt{1-x^2}$ 满足(2.1.19)，条件(2.1.20)成为

$$\|S_f(z)\|_\Delta\leqslant\frac{1}{2}. \tag{2.1.21}$$

函数 $f(z)=\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{i\gamma}$，$\gamma>0$，在 Δ 中不是单叶函数，而 $S_f(z)=(1+\gamma^2)(1-z^2)^{-2}$，故取 $p(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$，在这意义下是最佳的了.

取 $p(x)=\dfrac{\pi^2}{4}$，则 $y=\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 满足(2.1.19)，条件(2.1.20)成为

$$|S_f(z)|\leqslant\frac{\pi^2}{2}. \tag{2.1.22}$$

$f(z)=e^{\lambda z}$，当 $\lambda>\pi$ 时，在 Δ 中不是单叶函数，而 $S_f(z)=\dfrac{-1}{4}\lambda^2$，故取 $p(x)=\dfrac{\pi^2}{4}$，在这意义下是最佳的了.

定理 2.1.5(Nehari)　若 $f(z)$是单位圆 Δ 中的全纯函数，$F(x)$是$[0,1)$上的实值函数，且满足下列条件：

1) $F(x)$在$[0,1)$上有三阶连续导数，且 $F'(x)>0$；

2) $F''(0)\geqslant 0$；

3) $\{F(x),x\}\geqslant 0$，$(1-x^2)^2\{F(x),x\}$为非增.

若 $$|\{f(z),z\}|\leqslant\{F(|z|),|z|\}\quad(z\in\Delta)$$
成立,则 f 在 Δ 中为单叶函数.

取 $$F(t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{(1-s^2)^{\mu+1}},\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1,$$
则 $F(t)$ 满足定理 2.1.5 中的条件 1)、2)、3). 而 $\{F;t\}=\dfrac{2(1+\mu)(1-\mu t^2)}{(1-t^2)^2}$，于是有：$f$ 在 Δ 中为单叶函数，若

$$|\{f;z\}|\leqslant\frac{2(1+\mu)(1-\mu|z|^2)}{(1-|z|^2)^2},\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1.$$

取 $\mu=0$,上式就是(2.1.21). 当取 $\mu=1$时,上式成为

$$|\{f;z\}|\leqslant\frac{4}{1-|z|^2}.$$

这是 Pokornyi 的结果[2.32].

取 $$F(t)=\int_0^t\frac{(1+s^2)^\mu}{(1-s^2)^{\mu+1}}\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1,$$
则 $F(t)$也满足定理2.1.5中的条件1)、2)、3),而这就导出了 f 在 Δ 中为单叶函数,若

$$|\{f,z\}|\leqslant\frac{2(1-\mu^2)}{(1-|z|^2)^2}+\frac{2\mu(2+\mu)}{(1+|z|^2)^2},\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1.$$

取 $\mu=0$,上式就是(2.1.21);取 $\mu=1$,上式成为

$$|\{f,z\}|\leqslant\frac{6}{(1+|z|^2)^2}.$$

取 $F(t)=\tan\dfrac{1}{2}\pi t$，就得 (2.1.22).

B. Schwarz 指出,这两条定理是相互等价的[2.33].

所有这些定理的证明在此从略,请读者参阅有关文献.

§2.2 典型域上全纯映照的 Schwarz 导数

在上一节中简单地回顾了单复变数函数的 Schwarz 导数的几种不同的观点与途径. 这些对如何引入高维空间中的映照的

Schwarz 导数是有所启迪的.

在§2.1中介绍了第一条途径,即最早由 H. A. Schwarz 引入函数的 Schwarz 导数的途径,若想沿着这条途径推广到高维空间中,那显然是困难的.因而至今似乎未见到这方面的工作,就不足为奇了.§2.1中介绍的第二种观点,即将函数用 Möbius 变换作二阶逼近,而函数的 Schwarz 导数正好用来刻画函数与 Möbius 变换之间的偏离.沿着这种想法来定义高维空间的映照的 Schwarz 导数的有 K. Carne[2.5] 以及 B. Osgood 与 D. Stove[2.29],[2.30]等学者的优秀工作.他们讨论了两个相同维数的 Riemann 流形之间的共形映照,然后用 Riemann 流形上的 Möbius 变换来对此共形映照作二阶逼近.由此定义了这个共形映照的 Schwarz 导数.不但如此,他们还用此 Schwarz 导数建立了相应的嵌入判别准则,即一些 Nehari 定理.由于这方面的工作篇幅很长,本书就不作介绍了.有兴趣的读者可以参阅他们的著作.在§2.5中将按此观点讨论 $\mathbf{C}^{m\times n}$中域的全纯映照的 Schwarz 导数及高阶 Schwarz 导数.

在§2.1中还介绍了引入函数的 Schwarz 导数的第三种观点与途径.这就是 Ahlfors 的"Schwarz 导数是交比的无穷小形式".在§2.2、§2.3及§2.4中都贯穿着这一思想.在§2.2中定义并讨论第一类典型域

$$R_1 = \left\{ Z = Z^{(n)} = \begin{pmatrix} z_{11}, & \cdots, & z_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1}, & \cdots, & z_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{n\times n}: I - Z\overline{Z}' > 0 \right\}$$

上的全纯映照的 Schwarz 导数.在§2.3及§2.4中,应用李群的观点,定义与讨论在矩阵空间 $\mathbf{C}^{m\times n}(m\leqslant n)$及 $\mathbf{C}^n$ 中的域 Ω 上的全纯映照的 Schwarz 导数.证明 Schwarz 导数在复 Grassman 流形 $CG(m,n)$的全纯自同构群的作用下是相似不变的.还证明 Schwarz导数在 Ω 上为零当且仅当全纯映照为线性有理分式映照,且这样的映照在 Ω 上是双全纯的,如果 Ω 为凸域.在 $\mathbf{C}^n$ 的情形,还定义与讨论了大 Schwarz 导数.

在本节中，只讨论了第一类典型域 R_{I} 上的全纯映照的 Schwarz 导数，第二类典型域 R_{II} 及第三类典型域 R_{III} 上的全纯映照均可类似地讨论. 不但如此，这些结果还可望推广到实数域或四元数体上的典型域上.

在本节中讨论 R_{I} 当 $m=n$ 时的情形，从交比出发，给出 R_{I} 上全纯映照的 Schwarz 导数的定义. 并且证明：在 R_{I} 的全纯自同构群的作用下，这是个相似不变量(定理2.2.1)，然后证明：R_{I} 上全纯映照的 Schwarz 导数等于零，当且仅当这个映照是有理线性分式(定理2.2.2以及与之等价的定理2.2.3). 为了证明这个定理，需要证明一些有关的引理(引理2.2.1，引理2.2.2以及引理2.2.3). 最后指出：可以引进一个在 R_{I} 的全纯自同构群作用下的新的相似不变量，而这个相似不变量在单复变数函数论中是不存在的.

特别要指出的是：引理2.2.3是一条极为重要的代数引理，不仅在证明定理2.2.2的过程中应用这条引理是关键的一步，而且在§2.3及§2.4中继续起着关键的作用.

下面来叙述及证明定理2.2.1.

已知

$$W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}=(\overline{A}'+Z\overline{B}')^{-1}(\overline{C}'+Z\overline{D}') \tag{2.2.1}$$

为 R_{I} 的全纯自同构群[2.16]，这里 A、B、C 及 D 满足

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A}'A-\overline{C}'C=I,\ \overline{A}'B=\overline{C}'D,\ \overline{B}'B-\overline{D}'D=-I,\\ A\overline{A}'-B\overline{B}'=I,\ A\overline{C}'=B\overline{D}',\ C\overline{C}'-D\overline{D}'=-I.\end{array}\right\} \tag{2.2.2}$$

若 $Z_k(k=1,2,3,4)$ 为 R_{I} 中4个点，在(2.2.1)的映照下，映为 $W_k=W(Z_k)(k=1,2,3,4)$. 华罗庚[2.19]定义4点的交比为(当 $m=n$，即矩阵 Z 与 W 均为方阵时)

$$\begin{aligned}[W]&=(W_1,W_2,W_3,W_4)\\ &=(W_1-W_3)(W_2-W_3)^{-1}(W_2-W_4)(W_1-W_4)^{-1}.\end{aligned}$$

由于

$$W_1-W_3=(\overline{A}'+Z_1\overline{B}')^{-1}(Z_1-Z_3)(CZ_3+D)^{-1},$$

$$(W_2 - W_3)^{-1} = (CZ_3 + D)(Z_2 - Z_3)^{-1}(\overline{A}' + Z_2\overline{B}'),$$

$$W_2 - W_4 = (\overline{A}' + Z_2\overline{B}')^{-1}(Z_2 - Z_4)(CZ_4 + D)^{-1},$$

以及

$$(W_1 - W_4)^{-1} = (CZ_4 + D)^{-1}(Z_1 - Z_4)^{-1}(\overline{A}' + Z_1\overline{B}'),$$

得到

$$[W] = (\overline{A}' + Z_1\overline{B}')^{-1}[Z](\overline{A}' + Z_1\overline{B}'), \qquad (2.2.3)$$

即交比是在 R_{I}的全纯自同构群作用下的相似不变量.

若
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11}, & \cdots, & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1}, & \cdots, & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{n\times n},$$

记 $\lambda=(\lambda_{11},\cdots,\lambda_{1n},\cdots,\lambda_{n1},\cdots,\lambda_{nn})$，$\lambda^{(2)}$，$\lambda^{(3)}$，…，$\lambda^{(k)}$ 为 λ 的 2 次、3次、…、k 次 Kronecker 乘积.

若 $W=W(Z)=(W_{ij}(z))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$为 R_{I}上的全纯映照，则 $W=W(Z)$ 在方向 Λ 的方向导数为

$$DW = D_\Lambda W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} W(Z+\xi\Lambda)\Big|_{\xi=0},$$

这里 $\xi\in\mathbf{C}$. 显然

$$DW = D_\Lambda W = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'W$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i,j}\lambda_{ij}\dfrac{\partial W_{11}}{\partial z_{ij}}, & \cdots, & \sum_{i,j}\lambda_{ij}\dfrac{\partial W_{1n}}{\partial z_{ij}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j}\lambda_{ij}\dfrac{\partial W_{n1}}{\partial z_{ij}}, & \cdots, & \sum_{i,j}\lambda_{ij}\dfrac{\partial W_{nn}}{\partial z_{ij}} \end{bmatrix},$$

这里 $\dfrac{\partial}{\partial z}=\left(\dfrac{\partial}{\partial z_{11}},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial z_{1n}},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial z_{n1}},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial z_{nn}}\right)$. 而 W 在方向 Λ 的二次及三次的方向导数为

$$D^2W = D_\Lambda^2 W = \lambda^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)'}W$$

以及
$$D^3W = D_\Lambda^3 W = \lambda^{(3)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(3)'} W.$$

若 $Z \in R_\mathrm{I}$，取 ξ 的模充分小，使得 $Z+\Lambda\xi \in R_\mathrm{I}$. 考虑 $W(Z+\Lambda\xi)$ 对 ξ 的展开，其中任一元素 $W_{\alpha\beta}$ 的展开式为：

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(Z + \Lambda\xi) &= W_{\alpha\beta}(Z) + \sum_{i,j} \frac{\partial W_{\alpha\beta}(Z)}{\partial z_{ij}} \lambda_{ij}\xi \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 W_{\alpha\beta}(Z)}{\partial z_{ij}\partial z_{kl}} \lambda_{ij}\lambda_{kl}\xi^2 + \cdots \\ &= W_{\alpha\beta}(Z) + D_\Lambda W_{\alpha\beta}(Z)\xi + \frac{1}{2}D_\Lambda^2 W_{\alpha\beta}(Z) \\ &\quad \times \xi^2 + \frac{1}{6}D_\Lambda^3 W_{\alpha\beta}(Z)\xi^3 + \cdots, \end{aligned}$$

于是
$$W(Z + \Lambda\xi) = W(Z) + A_1\xi + \frac{1}{2}A_2\xi^2 + \frac{1}{6}A_3\xi^3 + \cdots,$$

这里 $A_k = D_\Lambda^k W(Z)$ $(k=1,2,3,\cdots)$.

令
$$W_1 = W(Z),\ W_2 = W(Z + \Lambda\xi),$$
$$W_3 = W(Z + 2\Lambda\xi) \text{ 及 } W_4 = W(Z + 3\Lambda\xi),$$

于是

$$\begin{aligned} W_1 - W_3 &= -2A_1\xi - 2A_2\xi^2 - \frac{4}{3}A_3\xi^3 - \cdots \\ &= -2\left(I + A_2A_1^{-1}\xi + \frac{2}{3}A_3A_1^{-1}\xi^2 + \cdots\right)A_1\xi, \\ W_2 - W_3 &= -A_1\xi - \frac{3}{2}A_2\xi^2 - \frac{7}{6}A_3\xi^3 - \cdots \\ &= -\left(I + \frac{3}{2}A_2A_1^{-1}\xi + \frac{7}{6}A_3A_1^{-1}\xi^2 + \cdots\right)A_1\xi, \\ W_2 - W_4 &= -2A_1\xi - 4A_2\xi^2 - \frac{13}{3}A_3\xi^3 - \cdots \\ &= -2\left(I + 2A_2A_1^{-1}\xi + \frac{13}{6}A_3A_1^{-1}\xi^2 + \cdots\right)A_1\xi \end{aligned}$$

以及

$$W_1 - W_4 = -3A_1\xi - \frac{9}{2}A_2\xi^2 - \frac{9}{2}A_3\xi^3 - \cdots$$
$$= -3\left(I + \frac{3}{2}A_2A_1^{-1}\xi + \frac{3}{2}A_3A_1^{-1}\xi^2 + \cdots\right)A_1\xi.$$

当 ξ 充分小时，交比

$$\begin{aligned}[W] &= (W_1, W_2, W_3, W_4) \\ &= (W_1 - W_3)(W_2 - W_3)^{-1}(W_2 - W_4)(W_1 - W_4)^{-1} \\ &= \frac{4}{3}\left(I + A_2A_1^{-1}\xi + \frac{2}{3}A_3A_1^{-1}\xi^2 + \cdots\right) \\ &\quad \times \left(I + \frac{3}{2}A_2A_1^{-1}\xi + \frac{7}{6}A_3A_1^{-1}\xi^2 + \cdots\right)^{-1} \\ &\quad \times \left(I + 2A_2A_1^{-1}\xi + \frac{13}{6}A_3A_1^{-1}\xi^2 + \cdots\right) \\ &\quad \times \left(I + \frac{3}{2}A_2A_1^{-1}\xi + \frac{3}{2}A_3A_1^{-1}\xi^2 + \cdots\right)^{-1} \\ &= \frac{4}{3}\left(I + \frac{1}{6}\left(A_3A_1^{-1} - \frac{3}{2}A_2A_1^{-1}A_2A_1^{-1}\right)\xi^2 + \cdots\right).\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

另一方面，若 $W(Z)$ 的象在 R_1 中，令

$$X = (AW + B)(CW + D)^{-1},$$

这里 A, B, C 及 D 满足(2.2.2)，于是由(2.2.3)，得到

$$[X] = (\overline{A}' + W\overline{B}')^{-1}[W](\overline{A}' + W\overline{B}').$$

若 $A_k(X)$、$A_k(W)$ 为 X 与 W 在方向 Λ 的 k 次方向导数，则由(2.2.4)，有

$$\begin{aligned}[X] &= \frac{4}{3}\Big(I + \Big(\frac{1}{6}A_3(X)A_1^{-1}(X) \\ &\qquad - \frac{1}{4}A_2(X)A_1^{-1}(X)A_2(X)A_1^{-1}(X)\Big)\xi^2 + \cdots \\ &= (\overline{A}' + W\overline{B}')^{-1}\frac{4}{3}\Big(I + \Big(\frac{1}{6}A_3(W)A_1^{-1}(W)\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}A_2(W)A_1^{-1}(W)A_2(W)A_1^{-1}(W)\Big)\xi^2+\cdots\Big)(\overline{A}'+W\overline{B}').$$

恒等上式两端 ξ^2 的系数,再乘以 $\frac{2}{9}$, 即得

$$\begin{aligned}&A_3(X)A_1^{-1}(X)-\frac{3}{2}A_2(X)A_1^{-1}(X)A_2(X)A_1^{-1}(X)\\&\quad=(\overline{A}'+W\overline{B}')^{-1}(A_3(W)A_1^{-1}(W)\\&\qquad-\frac{3}{2}A_2(W)A_1^{-1}(W)A_2(W)A_1^{-1}(W))(\overline{A}'+W\overline{B}').\end{aligned}$$

也就是在 R_1的全纯自同构群的作用下, $A_3A_1^{-1}-\frac{3}{2}A_2A_1^{-1}A_2A_1^{-1}$ 是相似不变量. 于是我们有理由定义

$$\begin{aligned}&A_3(W)A_1^{-1}(W)-\frac{3}{2}A_2(W)A_1^{-1}(W)A_2(W)A_1^{-1}(W)\\&\quad=D_A^3W(D_AW)^{-1}-\frac{3}{2}D_A^2W(D_AW)^{-1}D_A^2W(D_AW)^{-1}\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

为 W 在方向 A 对 Z 的 Schwarz 导数,记作$\{W;Z\}_A$,显然(2.2.5)还可表为

$$D_A((D_A^2,W)(D_A,W)^{-1})-\frac{1}{2}((D_A^2W)(D_AW)^{-1})^2.\tag{2.2.5'}$$

当 $n=1$时,定义(2.2.5)与(2.2.5′)与(2.2.4)是相一致的.

更一般地,若令

$$W_1=W(Z),\ W_2=W(Z+\alpha A\xi),$$

$$W_3=W(Z+\beta A\xi),\ W_4=W(Z+\gamma A\xi)$$

(式中 α,β,γ 为不相同的非零常数),则经过冗长的计算,可得

$$[W]=(0,\alpha,\beta,\gamma)\Big(I-\frac{1}{6}\alpha(\beta-\gamma)\{W;Z\}_A\xi^2+\cdots\Big),$$

当 $\alpha=1,\beta=2$及 $\gamma=3$时,即得(2.2.4).

由四点交比在 R_1的全纯自同构群作用下的相似不变性质,从上式即得以下定理:

定理2.2.1　$\{W,Z\}_A$ 是在 $R_{\rm I}$ 的全纯自同构群作用下的相似不变量.

在单复变数中，$S_f(z)=0$ 当且仅当 f 为有理线性分式，下面将这个结果推广到典型域上.

定理2.2.2　(1) 若 $W=W(Z)$ 为 $R_{\rm I}$ 上的全纯映照，$W=W(Z):R_{\rm I}\to\mathbf{C}^{n\times n}$，$J_W(0)$ 非异，则

$$\{W;Z\}_Z=0 \tag{2.2.6}$$

在 $R_{\rm I}$ 中使 $\{W;Z\}_Z$ 有意义的点上都成立，当且仅当

$$W=W(Z)=W(0)+D_ZW(0)(I-L(Z))^{-1}, \tag{2.2.7}$$

或是

$$W=W(Z)=W(0)+(I-L(Z))^{-1}D_ZW(0). \tag{2.2.8}$$

这里 $L(Z)$ 为 $n\times n$ 方阵，其每个元素都是 Z 的元素的齐次线性函数，$I-L(Z)$ 在 $R_{\rm I}$ 中非异，且由(2.2.7)、(2.2.8)所定义的 $W(Z)$ 在 $R_{\rm I}$ 中为双全纯.

(2) 若 $W(Z)$ 由(2.2.7)或(2.2.8)所定义，且 $I-L(Z)$ 在 $R_{\rm I}$ 中非异，则对所有的 $Z\in R_{\rm I}$ 及非零的 $n\times n$ 方阵 A，有

$$\{W;Z\}_A=0 \tag{2.2.9}$$

在 $R_{\rm I}$ 中除去一个低维流形外都成立.

(3) 假设如(1)，则由 $\{W;Z\}_Z=0$ 可以导出 $\{W;Z\}_A=0$ 对所有的 $0\neq A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 在 $R_{\rm I}$ 中除去一个低维流形外都成立.

定理2.2.2中的(2)可经直接计算得证. 如(1)已证，则(3)是显然的. 要证(1)需要以下三条引理.

引理2.2.1　若 Z 为复元素方阵，其元素均为独立复变数，则 $\det Z$ 是不可约的.

证　若 $\det Z$ 可约，即 $\det Z=PQ$，而 P、Q 为两个非常数的多项式. 将 Z 中的元素除去一个以外，其余的全固定，则 $\det Z$ 是这个变数的线性函数，于是 P、Q 中只有一个多项式含有这个元素. 由于假设 P、Q 为非常数，于是 Z 中每个元素或是在 P 中，或是在 Q 中. 考虑某个元素在 P 中出现，并考虑 Z 中此元素出现的一行，将此行的元素视作变数，而将 Z 中的其他元素视为常数. 将 $\det Z$

沿此行展开，于是此行各个变数均为一次的常系数多项式. 若将此行的元素除去一个以外，全视为常数，则 $\det Z=0$ 的根依赖于此行的其他元素，于是 P 中包有此行的其他元素. 同法可用于列. 于是 P 中包有 Z 中的所有的元素，而 Q 则没有 Z 中的任意元素，这与 Q 为非常数的假设相矛盾.

引理2.2.2　若 Z 是元素为复变数的方阵，W 为 Z 的代数余子式. 若 R_k 表示 Z 的第 k 行，则 R_kW 可为 $\det Z$ 除尽.

证　显然 R_kW 为一行向量. 第 k 个元素即为 $\det Z$. 当 $m\neq k$ 时，第 m 个元素显然为将 Z 中的 m 行用 R_k 替代后所得到的方阵的行列式，这显然为 0.

引理2.2.3　若 $Z=(Z_{ij})$ 为 $n\times n$ 复变数方阵，W 为其代数余子式. 若 A 为一个 n 元素的行向量，每个元素为 $Z_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 的二次齐次多项式，B 为一个 n 元素的列向量，每个元素为 $Z_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 的二次齐次多项式. 若 AWB 可被 $\det Z$ 除，则或是 AW 的每个元素可被 $\det Z$ 除，或是 WB 的每个元素可被 $\det Z$ 除. 于是存在一个以 $Z_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 的线性齐次式为元素的行向量 L，使得 $A=LZ$，或是存在一个以 $Z_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 的线性齐次式为元素的列向量 L，使得 $B=ZL$.

证　若 Z 有一个子式(minor)为非零行列式，必要的话，可交换 Z 的行列，使这个子式即为 (n,n) 子式. 这样，W 中 (n,n) 元素即为其行列式. 设此行列式为 p. 与不可约多项式 $\det Z$ 相比较，这是低阶的. 这只要证明 pAW 及 WBp，其元素均可被 $\det Z$ 整除即可证明引理2.2.3.

记 $R_{n-1,k}$ 为一有 $n-1$ 个元素的行向量，其元素与 Z 的第 k 行的开始 $n-1$ 个元素是相一致的. 考虑方程

$$\sum_{k=1}^{n-1}x_kR_{n-1,k}=pA_{n-1},\tag{2.2.10}$$

这里 A_{n-1} 为 A 的开始 $n-1$ 个元素组成的行向量. 由于 $(n-1)\times(n-1)$ 方阵 $\begin{pmatrix}R_{n-1,1}\\ \cdots\cdots\\ R_{n-1,n-1}\end{pmatrix}$ 的行列式即为 p，而且不等于零，故由

Cramer 法则,(2.2.10)有一组多项式解 $x_k(k=1,2,\cdots,n-1)$.

由引理2.2.2,有

$$\left(pA-\sum_{k=1}^{n-1}x_kR_k\right)W=pAW+\text{每个元素均可被}\det Z\text{除尽的项}. \tag{2.2.11}$$

另一方面,取 x_k 即为(2.2.10)的解,于是上式左端开始 $n-1$ 个元素均为零,第 n 个元素为一个多项式乘以 p,记作 pa_n.

对列向量可以进行同样的讨论,得到相应的 $y_k(k=1,2,\cdots,n-1)$ 及 b_n. 由引理假设: $pAWBp$ 可以用 $\det Z$ 除尽,于是有(2.2.11)及相应于列向量的公式,得到

$$\left(pa_n-\sum_{k=1}^{n-1}x_kZ_{kn}\right)p\left(b_np-\sum_{k=1}^{n-1}y_kZ_{nk}\right), \tag{2.2.12}$$

可以用 $\det Z$ 除尽.

首先假设不可约多项式 $\det Z$ 可以除尽(2.2.12)中的第一个因子,则 $pA-\sum_{k=1}^{n-1}x_kR_k$ 可以被 $\det Z$ 除尽,于是 $\left(pA-\sum_{k=1}^{n-1}x_kR_k\right)W$ 可以被 $\det Z$ 除尽,由(2.2.11),这就是 pAW + 可被 $\det Z$ 除尽的项. 故 pAW 可被 $\det Z$ 除尽. 由于 p 与 $\det Z$ 无公共因子,故 $AW=\alpha\det Z$,这里 α 为多项式元素的向量,于是 $A=\alpha Z$. 由于 Z 的每个元素的阶为1,而 A 的每个元素的阶为2,故 α 的每个元素只能是 $Z_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 的一次式,于是 α 为一行向量 L,每个元素为 Z_{ij} 的线性齐次式,即 $A=LZ$.

同样可以讨论对(2.2.12)的最后一个因子,得到 $B=ZL$. 而 L 为每个元素为 Z_{ij}的线性齐次式的列向量.

有了以上的三条代数的引理,就可以用来证明定理2.2.2(1).

若 $Z\in R_{\mathrm{I}}$,且 $D_ZW(0)$ 为满秩,固定 Z,对于每个 $t\in[0,1]$,有 $tZ\in R_{\mathrm{I}}$,令

$$Q(t)=W(tZ),$$

$$W(Z)=W(0)+D_ZW(0)+C_2(Z)+C_3(Z)+C_4(Z)+\cdots,$$

这里 $C_2(Z),C_3(Z),C_4(Z),\cdots$ 为 $n\times n$ 方阵，其每个元素分别为 Z 的元素的二次、三次、四次、…齐次多项式. 于是

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=D_ZW(tZ)=\frac{1}{t}D_{tZ}W(tZ)$$
$$=D_ZW(0)+2tC_2(Z)+3t^2C_3(Z)+\cdots$$

及

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}=D_Z^2W(tZ)=\frac{1}{t^2}D_{tZ}^2W(tZ)=2C_2(Z)+6tC_3(Z)+\cdots.$$

因之，可以取 $\varepsilon>0$ 充分小，使得 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ 在 $t\in[0,\varepsilon]$ 中是非奇异的. 于是可以在 $t\in[0,\varepsilon]$ 中定义

$$A(t)=\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}=D_Z^2W(tZ)(D_ZW(tZ))^{-1}.$$

容易验证：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{2}A^2=\{W;tZ\}_Z=\frac{1}{t^2}\{W;tZ\}_{tZ}=0.$$

设 $G(t):[0,\varepsilon]\to\mathbf{C}^{n\times n}$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}GA;\\ G(0)=I.\end{cases}\tag{2.2.13}$$

这样的 G 是存在的(参阅文献[2.3])，且 $\det G\neq0$. 由(2.2.13)，有

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{1}{2}G\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{2}A^2\right)\equiv0,$$

即 $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$ 与 t 无关. 故

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}GA=-\frac{1}{2}GA\bigg|_{t=0}=-\frac{1}{2}A_0,\tag{2.2.14}$$

这里 $A_0=A(0)$. 在(2.2.14)式两端对 t 从 0 到 t 进行积分，得到

$$G(t)-G(0)=-\frac{t}{2}A_0,$$

即
$$G(t)=G(0)-\frac{t}{2}A_0.$$

将上式代入(2.2.14)就有

$$-\frac{1}{2}\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)A=-\frac{1}{2}A_0,$$

即
$$\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)A=A_0.$$

由 A 的定义，上式就是

$$\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}=A_0\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

这也可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right]+\frac{1}{2}A_0\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=A_0\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},$$

此即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{1}{2}A_0\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{2.2.15}$$

在上式两端对 t 由 0 到 t 进行积分，得到

$$\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}A_0Q(t)-\frac{1}{2}A_0Q(0)+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(0).$$

由于 $Q(0)=W(0)$ 以及 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(0)=\left(\sum_{ij}\frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial Z_{ij}}(0)Z_{ij}\right)_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n}$ $=D_ZW(0)$，故上式为

$$\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}A_0(Q(t)-W(0))+D_ZW(0).$$

这也可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)Q\right]+\frac{1}{2}A_0Q(t)=\frac{1}{2}A_0Q(t)-\frac{1}{2}A_0W(0)+D_ZW(0),$$

即为
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)Q\right]=D_ZW(0)-\frac{1}{2}A_0W(0).$$

在上式两端对 t 从0到 t 进行积分，并注意到 $Q(0)=W(0)$，就有

$$\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)Q=t\left(D_ZW(0)-\frac{1}{2}A_0W(0)\right)+W(0).$$

当 t 取得充分小时，可使 $G(t)=I-\frac{t}{2}A_0$ 为满秩，所以当 t 充分小时，

$$Q(t) = W(tZ) = t\left(I - \frac{t}{2}A_0\right)^{-1} D_Z W(0) + W(0). \tag{2.2.16}$$

将 $W(tZ)$ 及 $t\left(I-\frac{t}{2}A_0\right)^{-1}D_ZW(0)+W(0)$ 对 t 在 $t=0$ 处附近展开，则得到

$$W(tZ) = W(0) + tD_ZW(0) + t^2C_2(Z) + t^3C_3(Z) + t^4C_4(Z) + \cdots. \tag{2.2.17}$$

而

$$\begin{aligned} &W(0) + t\left(I - \frac{t}{2}A_0\right)^{-1} D_ZW(0) \\ &= W(0) + tD_ZW(0) + \frac{t^2}{2}A_0D_ZW(0) \\ &\quad + \frac{t^3}{4}A_0^2D_ZW(0) + \frac{t^3}{8}A_0^3D_ZW(0) + \cdots \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

由(2.2.16)式，对(2.2.17)及(2.2.18)作比较，得到

$$C_2(Z) = \frac{1}{2}A_0D_ZW(0),$$

$$C_3(Z) = \frac{1}{4}A_0^2D_ZW(0),$$

$$C_4(Z) = \frac{1}{8}A_0^3D_ZW(0),$$

$$\cdots\cdots\cdots.$$

由于 $D_ZW(0)$ 非异，故

$$\begin{aligned} C_3(Z) &= \frac{1}{2}A_0(D_ZW(0))(D_ZW(0))^{-1}A_0D_ZW(0) \\ &= C_2(Z)(D_ZW(0))^{-1}C_2(Z). \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

记 $\xi=(\xi_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}=D_ZW(0)$. 由于 $J_W(0)$ 是非异的，因而可以解出 Z_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为 ξ 的元素的线性齐次多项式. 即

$$Z = P(\xi) = (p_{ij}(\xi))_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

每个 $p_{ij}(\xi)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为 ξ 的元素的线性齐次多项式. 于是(2.2.19)可以写为

$$C_3(P(\xi)) = C_2(P(\xi))\xi^{-1}C_2(P(\xi)),$$

令 $C_2(P(\xi))=B_2(\xi)$，$C_3(P(\xi))=B_3(\xi)$，则 $B_2(\xi)$、$B_3(\xi)$分别为ξ的元素的二次、三次齐次多项式. 上式成为

$$B_3(\xi) = B_2(\xi)\xi^{-1}B_2(\xi).$$

由引理2. 2. 3，有

$$B_2(\xi) = \xi L_0(\xi) \text{ 或是 } B_2(\xi) = L_0(\xi)\xi,$$

这里 $L_0(\xi)$为ξ的元素的线性齐次多项式. 将 $\xi=D_ZW(0)$ 分别代入上面两式，就有

$$B_2(\xi) = C_2(P(\xi)) = C_2(Z) = D_ZW(0)L_0(D_ZW(0)),$$

或是 $B_2(\xi) = C_2(P(\xi)) = C_2(Z) = L_0(D_ZW(0))D_ZW(0)$.

记 $L(Z)=L_0(D_ZW(0))$，则 $L(Z)$ 的每个元素都是 Z 的元素的线性齐次多项式，即

$$C_2(Z) = D_ZW(0)L(Z),$$

或是

$$C_2(Z) = L(Z)D_ZW(0).$$

若 $C_2(Z)=D_ZW(0)L(Z)$，则由(2. 2. 19)，

$$\begin{aligned} C_3(Z) &= D_ZW(0)L(Z)(D_ZW(0))^{-1}D_ZW(0)L(Z) \\ &= D_ZW(0)L^2(Z), \end{aligned}$$

同样，可得

$$C_4(Z) = D_ZW(0)L^3(Z),$$

$$\cdots\cdots,$$

将这些结果代入(2. 2. 17)，就有

$$\begin{aligned} W(tZ) &= W(0)+tD_ZW(0)+t^2D_ZW(0)L(Z)+t^3D_ZW(0)L^2(Z) \\ &\quad + t^4D_ZW(0)L^3(Z) + \cdots \\ &= W(0) + tD_ZW(0)(I - tL(Z))^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

若 $C_2(Z)=L(Z)D_ZW(0)$，用同样办法可得到

$$W(tZ) = W(0) + t(I - tL(Z))^{-1}D_ZW(0). \tag{2.2.21}$$

(2. 2. 20)及(2. 2. 21)在 $t=0$的一个邻域中成立，将 t 取为复变数，则 $W(tZ)$是 t 在单位圆 $\Delta=\{t\in \mathbf{C}: |t|<1\}$中的解析函数. 因之，由复变数解析函数的唯一性定理，由(2. 2. 20)及(2. 2. 21)所定义的 $W(tZ)$ 在 $|t|<1$ 中都成立. 令 $t\to 1$，就有

$$W(Z)=W(0)+D_ZW(0)(I-L(Z))^{-1}$$

或是

$$W(Z)=W(0)+(I-L(Z))^{-1}D_ZW(0).$$

当 $D_ZW(0)$非异时成立.

若 $Z\in R_1$,且 $D_ZW(0)$非异,则在 Z 的附近的一个小邻域中 $D_ZW(0)$都是非异的. 由于多复变数全纯映照的唯一性定理,故(2.2.7)及(2.2.8)当 $Z\in R_1$时都成立.

由于 $W(Z)$在 R_1中全纯,故 $I-L(Z)$ 在 R_1 中非异.

再来证明由(2.2.7)及(2.2.8)所定义的 $W(Z)$. 当 $I-L(Z)$ 在 R_1中非异时,是 R_1中的双全纯映照.

如若不然,则在 R_1中有两点 $Z_1\neq Z_2$,使得 $W(Z_1)=W(Z_2)$. 先考虑映照

$$W(Z)=W(0)+D_ZW(0)(I-L(Z))^{-1},$$

由于 R_1为凸域,故当 $t\in[0,1]$时,$(1-t)Z_1+tZ_2\in R_1$.

令

$$\begin{aligned}Q(t)=&D_{(1-t)Z_1+tZ_2}W(0)(I-L((1-t)Z_1+tZ_2))^{-1}\\&-D_{Z_1}W(0)(I-L(Z_1))^{-1}\\=&(D_{Z_1}W(0)+t(D_{Z_2}W(0)-D_{Z_1}W(0)))(I-L(Z_1)\\&-t(L(Z_2)-L(Z_1)))^{-1}-D_{Z_1}W(0)(I-L(Z_1))^{-1},\end{aligned}$$

当 $t\in[0,1]$ 时. 显然,这样定义的 $Q(t)$ 在 $[0,1]$ 中有意义,且

$$Q(0)=Q(1)=0.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=&\{D_{Z_2}W(0)-D_{Z_1}W(0)\\&+(D_{Z_1}W(0)+t(D_{Z_2}W(0)-D_{Z_1}W(0)))\\&\times[I-L(Z_1)-t(L(Z_2)-L(Z_1))]^{-1}(L(Z_2)-L(Z_1))\}\\&\times[I-L(Z_1)-t(L(Z_2)-L(Z_1))]^{-1}\end{aligned}\tag{2.2.22}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} &= 2\{D_{Z_2}W(0) - D_{Z_1}W(0) \\ &\quad + (D_{Z_1}W(0) + t(D_{Z_2}W(0) - D_{Z_1}W(0))). \\ &\quad \times [I-L(Z_1)-t(L(Z_2)-L(Z_1))]^{-1}(L(Z_2)-L(Z_1))\} \\ &\quad \times [I - L(Z_1) - t(L(Z_2) - L(Z_1))]^{-1} \\ &\quad \times (L(Z_2) - L(Z_1))[I - L(Z_1) - t(L(Z_2) - L(Z_1))]^{-1} \\ &= 2\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(L(Z_2) - L(Z_1)) \\ &\quad \times [I - L(Z_1) - t(L(Z_2) - L(Z_1))]^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

令

$$A(t)=2(L(Z_2)-L(Z_1))[I-L(Z_1)-t(L(Z_2)-L(Z_1))]^{-1}, \tag{2.2.24}$$

则
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} &= 2(L(Z_2) - L(Z_1)) \\ &\quad \times [I - L(Z_1) - t(L(Z_2) - L(Z_1))]^{-1} \\ &\quad \times (L(Z_2) - L(Z_1))[I - L(Z_1) - t(L(Z_2) \\ &\quad - L(Z_1))]^{-1}.\end{aligned}$$

于是,有

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}A^2(t) = 0. \tag{2.2.25}$$

若 $G(t): t\in[0,1]\to \mathbf{C}^{n\times n}$ 为初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}AG, \\ G(0) = I\end{cases} \tag{2.2.26}$$

的解,这里 $A(t)$ 由 (2.2.24) 所定义. 由于

$$\frac{\mathrm{d}^2(QG)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}G + 2\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + Q\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2},$$

由(2.2.25)及(2.2.26),有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}G - \frac{1}{2}A\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}G + \frac{1}{4}A^2G = 0.\end{aligned}$$

由(2.2.23)及(2.2.26),有

$$2\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}G=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}AG+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}G=0.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2(QG)}{\mathrm{d}t^2}=0 \qquad (2.2.27)$$

在 $t\in[0,1]$ 中成立.

矩阵 $QG\overline{G}'\overline{Q}'$ 是半正定 Hermitian 阵,故有 $t_r(QG\overline{G}'\overline{Q}')\geqslant 0$. 由(2.2.28),有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{tr}(QG\overline{G}'\overline{Q}')=\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(QG\overline{G}'\overline{Q}')\right)=2\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}(QG)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(\overline{QG'})}{\mathrm{d}t}\right)\geqslant 0$$

在 $t\in[0,1]$中成立. 于是 $\mathrm{tr}(QG\overline{G}'Q)$作为 t 的函数在 $t\in[0,1]$中是一个连续凹函数. 但是已知 $QG\overline{G}'\overline{Q}'=0$当 $t=0$及 $t=1$时成立. 因此 $\mathrm{tr}(QG\overline{G}'\overline{Q}')=0$在$t\in[0,1]$上成立. 由于 $QG\overline{G}'\overline{Q}'$是半正定 Hermitian 阵,故 $QG\overline{G}'\overline{Q}'=0$在 $t\in[0,1]$上成立. 于是 $QG=0$在 $t\in[0,1]$上成立. 由于 $G(0)=I$,故在 $t=0$的附近有一邻域 N,使得 $G(t)$为非异当 $t\in N$ 时. 因此,当 $t\in N$ 时,$Q(t)=0$. 这是不可能的. 导致矛盾.

这就证明了 $W(Z)=W(0)+D_ZW(0)(I-L(Z))^{-1}$在 R_1中是双全纯的.

用同样方法,可证 $W(Z)=W(0)+(I-L(Z))^{-1}D_ZW(0)$在 R_1中是双全纯的.

这就完全证明了定理2.2.2.

显然,在定理2.2.2中,以 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的一个凸域来替代 R_1,则定理仍然成立.

由定理2.2.2,我们有理由称$\{W;Z\}_Z$ 即 W 在 Z 点对方向 Z 的 Schwarz 导数为 W 对 Z 的 Schwarz 导数,而记作$\{W;Z\}$. 当 $n=1$时即为 $z^2\left\{\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right\}=z^2\{f;z\}$,即通常的 Schwarz 导数乘以 z^2. 在§2.5中还将证明:由 Thurston 观点出发得到的 Schwarz 导数也是$\{W;Z\}$.

定理2.2.2还可以写成另外的形式.

讨论 R_1 上的全纯映照:

$$W = W(Z) = (A(Z) + B)(C(Z) + D)^{-1}$$

或 $$W = W(Z) = (C(Z) + D)^{-1}(A(Z) + B),$$

这里 $A(Z)$、B、$C(Z)$、$D \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $A(Z)$、$C(Z)$ 的元素都是 Z 的元素的齐次线性式,且 $C(Z)+D$ 在 R_1 中非异.

例如先讨论 $W=W(Z)=(C(Z)+D)^{-1}(A(Z)+B)$. 对固定的 Λ, $0\neq\Lambda\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 有

$$D_\Lambda W(Z) = (C(Z) + D)^{-1}[A(\Lambda) - C(\Lambda)(C(Z) + D)^{-1}(A(Z) + B)], \tag{2.2.28}$$

$$\begin{aligned} D_\Lambda^2 W(Z) &= -2(C(Z) + D)^{-1}C(\Lambda)(C(Z) + D)^{-1} \\ &\quad \times [A(\Lambda) - C(\Lambda)(C(Z) + D)^{-1}(A(Z) + B)] \\ &= -2(C(Z) + D)^{-1}C(\Lambda)D_\Lambda W(Z) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} D_\Lambda^3 W(Z) &= 6(C(Z) + D)^{-1}C(\Lambda)(C(Z) + D)^{-1}C(\Lambda)(C(Z) \\ &\quad + D)^{-1}[A(\Lambda) - C(\Lambda)(C(Z) + D)^{-1}(A(Z) + B)] \\ &= 6(C(Z) + D)^{-1}C(\Lambda)(C(Z) + D)^{-1}C(\Lambda)D_\Lambda W(Z). \end{aligned}$$

因此,除去一个低维流形

$$\begin{aligned} N = \{Z \in R_1 : \det(A(\Lambda) - C(\Lambda)(C(Z) + D)^{-1} \\ \times (A(Z) + B)) = 0\} \end{aligned}$$

以外, $\{W;Z\}_\Lambda = 0$ 在 R_1 上成立.

特别是由(2.2.28),有

$$D_Z W(0) = D^{-1}(A(Z) - C(Z)D^{-1}B).$$

由矩阵等式

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - CD^{-1}B & CD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

就可得到 $\det D_Z W(0) \neq 0$, 当且仅当 $\det\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \neq 0$.

同样对全纯映照

$$W = W(Z) = (A(Z) + B)(C(Z) + D)^{-1}.$$

固定 Λ, $0\neq\Lambda\in\mathbf{C}^{n\times n}$,可证除去一个低维流形外,

$$\{W;Z\}_\Lambda = 0$$

在 R_1 中成立. 且 $\det D_Z W(0)\neq 0$, 当且仅当 $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\neq 0$.

于是定理2.2.2可以重写为如下定理:

定理2.2.3 假设如定理2.2.2,则

$$\{W;Z\}_Z = 0$$

在 R_1中成立(在$\{W;Z\}_Z$ 有意义的那些点上)当且仅当

$$W = W(Z) = (A(Z) + B)(C(Z) + D)^{-1} \quad (2.2.29)$$

或

$$W = W(Z) = (C(Z) + D)^{-1}(A(Z) + B). \quad (2.2.30)$$

这里$A(Z)$、B、$C(Z)$、$D\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$A(Z)$和$C(Z)$的所有元素都是$Z$的元素的齐次线性式,而且$C(Z)+D$在$R_1$上非异,$\det\begin{pmatrix} A(Z) & B \\ C(Z) & D\end{pmatrix}\neq 0$ 在 R_1 上成立. 由(2.2.29)所定义的 $W(Z)$ 在 R_1 上双全纯.

事实上,也容易看出(2.2.7)与(2.2.29)以及(2.2.8)与(2.2.30)是相互等价的.

例如(2.2.29)可以写成

$$\begin{aligned} W = W(Z) &= (A(Z) + B)(C(Z) + D)^{-1} \\ &= BD^{-1} + (A(Z) - BD^{-1}C(Z))D^{-1}(I + C(Z))^{-1}, \end{aligned}$$

即相当于(2.2.7)中,

$$W(0)= BD^{-1},\ L(Z) = -C(Z),$$
$$D_Z W(0)= (A(Z) - BD^{-1}C(Z))D^{-1}.$$

而前面已经指出 $\det D_Z W(0)\neq 0$ 等价于 $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\neq 0$.

另一方面,(2.2.7)可以写成

$$\begin{aligned} W = W(Z) &= W(0) + D_Z W(0)(I - L(Z))^{-1} \\ &= [W(0) - W(0)L(Z) + D_Z W(0)](I - L(Z))^{-1}, \end{aligned}$$

即相当于(2.2.29)中

$$A(Z)= D_Z W(0) - W(0)L(Z),\ B = W(0),$$

$$C(Z) = -L(Z),\ D = I.$$

于是

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} D_Z W(0) - W(0)L(Z) & W(0) \\ -L(Z) & I \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} D_Z W(0) & 0 \\ -L(Z) & I \end{bmatrix}.$$

这也相当于：$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq 0$ 与 $\det D_Z W(0) \neq 0$ 是相等价的.

同样可以证明(2.2.8)与(2.2.30)是相互等价的.

显然定理2.2.3中的 R_{I} 可以用 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的凸域来替代，结论仍然成立.

在本节一开始已经证明：在 R_{I} 上的全纯映照 $W(Z)$，$W: R_{\mathrm{I}} \to \mathbf{C}^{n\times n}$，在 R_{I} 的全纯自同构群作用下，$W(Z)$ 的 Schwarz 导数是相似不变量. 除了这个相似不变量外，还可以构造出一些新的相似不变量.

若 $W: R_{\mathrm{I}} \to \mathbf{C}^{n\times n}$ 为全纯映照，且 W 的值域在 R_{I} 中，令

$$X = (AW + B)(CW + D)^{-1},$$

这里 A、B、C、D 满足(2.2.2). 若 Λ，$\pi \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则

$$D_\Lambda X = (\overline{A}' + W\overline{B}')^{-1}(D_\Lambda W)(CW + D)^{-1},$$

$$D_\pi X = (\overline{A}' + W\overline{B}')^{-1}(D_\pi W)(CW + D)^{-1}.$$

假设 $(D_\pi X)^{-1}$ 与 $(D_\pi W)^{-1}$ 是存在的，令

$$[X, Z]_{\Lambda,\pi} = (D_\Lambda X)(D_\pi X)^{-1},\ [W; Z]_{\Lambda,\pi} = (D_\Lambda W)(D_\pi W)^{-1}.$$

于是

$$[X, Z]_{\Lambda,\pi} = (\overline{A}' + W\overline{B}')^{-1}[W; Z]_{\Lambda,\pi}(\overline{A}' - W\overline{B}').$$

因之，$[W; Z]$ 是在 R_{I} 的全纯自同构群作用下的相似不变量. 这个相似不变量在单复变数函数中是不出现的.

§2.3　矩阵空间上全纯映照的 Schwarz 导数

在上一节讨论了 R_{I} 的情形，在这一节中要讨论当 $m \leqslant n$ 时，矩

阵空间 $\mathbf{C}^{m\times n}$中的域上全纯映照的 Schwarz 导数. 当 $m<n$ 时的情形当然要比 $m=n$ 时的情形困难得多. 为此要从李群的观点重新加以考虑:如何在 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 2)$上建立起四点的交比,使得这样定义的四点交比在全纯自同构群作用下具有相似不变性质,并可由此来定义 Schwarz 导数.

将 $\mathbf{C}^n$ 中的点看作列向量. $\mathbf{C}^n$ 上的一般复线性群 $GL(n,\mathbf{C})$中的元素从左端作用于 $\mathbf{C}^n$. 设 G 是 $GL(n,\mathbf{C})$的一个复子李群,对每个 $X\in\mathbf{C}^n$,$G(X)$表示 G 在 $\mathbf{C}^n$ 中过点 X 的轨道,这就把 $\mathbf{C}^n$ 分解为互不相交的轨道的并. 称 X 为 $\mathbf{C}^n$ 中关于 G 的一个正则点,若 $G(X)$与 G 微分同胚,这时还称 $G(X)$为正则轨道;否则,称 X 为奇异点,$G(X)$为奇异轨道. $\mathbf{C}^n$ 中关于 G 的正则点的全体组成的集合记作 $\mathbf{C}^n(G)$.

定义2.3.1 若 G 为 $GL(n,\mathbf{C})$的一个复子李群,$\mathbf{C}^n(G)$为 $\mathbf{C}^n$ 中关于 G 的正则点的全体组成的集合,且 $\mathbf{C}^n(G)$为 $\mathbf{C}^n$ 中的稠密开集,对 $\mathbf{C}^n$ 中的任意四点 z_1、z_2、z_3、z_4,有

1) 若 z_i-z_j,$(i,j)=(1,3),(2,3),(1,4),(2,4)$属于同一个正则轨道 $G(X)$,则称四点 z_1,z_2,z_3,z_4的交比$[z_1,z_2,z_3,z_4]$是存在的. 若记 $z_i-z_j=A_{ij}X$,$A_{ij}\in G$,则四点 z_1,z_2,z_3,z_4的交比定义为

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=A_{13}A_{23}^{-1}A_{24}A_{14}^{-1}. \tag{2.3.1}$$

显然交比的定义(2.3.1)是与 X 的选取无关的.

2) 若 z_i-z_j,$(i,j)=(1,3),(2,3),(1,4),(2,4)$属于两个及两个以上的不同的正则轨道,则称四点 z_1,z_2,z_3,z_4的交比$[z_1,z_2,z_3,z_4]$不存在.

当 $n=1$时,定义2.3.1就是通常的交比. 因为只要取 $G=GL(1,\mathbf{C})$,显然 $\mathbf{C}(G)$为 $\mathbf{C}$ 中的稠密开集. 而对 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 2)$来说,$G$ 可以有多种选择,且正则轨道也可以不止一种.

定义2.3.1可在下述意义下完备化:若$\overline{G}$为 G 在 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$中的闭包,且允许(2.3.1)中 A_{13}、$A_{24}\in\overline{G}$. 在$\overline{G}$上添加无穷远点,还可允许 A_{23}^{-1}、A_{14}^{-1}属于这个集合. 由于 $\mathbf{C}^n(G)$在 $\mathbf{C}^n$ 中稠密,这样 $\mathbf{C}^n$ 中任意四点的交比或存在且由(2.3.1)给出,或不存在就可完全确定.

另一方面，若有一个正则轨道 $G(X)=\mathbf{C}^n(G)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中稠密开集，则定义2.3.1中的2)就不会出现，例如§2.2中定义的四点交比就是这样.

有了定义2.3.1，就可以定义四点交比的无穷小形式，即 Schwarz 导数.

定义2.3.2　若 $W=W(Z):\Omega\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 为域 Ω 上的全纯映照，$Z\in\Omega$. W 在 Z 点的 Jacobian $J_W(Z)$ 非异. 取 $0\neq\lambda\in\mathbf{C}^n$，使得 $D_\lambda W(Z)$ 是 G 的正则点，若 $\varepsilon>0$，置

$$l=\{Z+u\lambda\,|\,u\in\mathbf{C},\|u\lambda\|<\varepsilon\},$$

这里$\|\cdot\|$表示向量的长度. 如果存在 $\varepsilon>0$，使得对 l 上的任意互异的四点 Z_i $(i=1,2,3,4)$ 由定义2.3.1所定义的四点的交比 $[W(Z_1),W(Z_2),W(Z_3),W(Z_4)]$ 恒存在，就称 W 在 Z 点沿 λ 方向的 Schwarz 导数 $\{W;Z\}_\lambda$ 存在，且可具体表示成下面的极限(它必然存在)：

$$\{W;Z\}_\lambda=\lim_{t\to 0}\frac{6([0,\alpha,\beta,\gamma]I_n-[W(Z_1),W(Z_2),W(Z_3),W(Z_4)])}{t^2\alpha(\beta-\gamma)[0,\alpha,\beta,\gamma]},\tag{2.3.2}$$

如果这样的 $\varepsilon>0$ 不存在，则称 W 在 Z 点沿 λ 方向的 Schwarz 导数 $\{W;Z\}_\lambda$ 不存在. 对 $J_W(Z)$ 奇异的点 Z，或 $J_W(Z)$ 非异，但 $D_\lambda W(Z)$ 是 G 的奇异点的方向 λ，其 Schwarz 导数存在与否，我们均不加以定义. 在(2.3.2)中，$Z_1=Z,Z_2=Z+\alpha t\lambda,Z_3=Z+\beta t\lambda,Z_4=Z+\gamma t\lambda$，$[0,\alpha,\beta,\gamma]$ 是四个互异复数 $0,\alpha,\beta,\gamma$ 的四点的交比. 容易验证：$\{W;Z\}_\lambda$ 与 α,β,γ 的选取无关.

特别是，若固定 $Z_0\in\Omega$，对任意 $Z\in\Omega,Z\neq Z_0$，称 $\{W;Z\}_{Z-Z_0}$ 为 W 在 Z 点关于 Z_0 点的 Schwarz 导数. 当 $0\in\Omega$，且取 $Z_0=0$ 时，记 $\{W;Z\}_Z$ 为 $\{W;Z\}$，并称之为 W 在 Z 点的 Schwarz 导数.

对于每个 $n\geqslant 2$，均存在若干个 $G\subset G(n,\mathbf{C})$，使得定义2.3.1和定义2.3.2成立. 且若 $\{W;Z\}_\lambda$ 存在，则可用 W 在 λ 方向的方向导数 $D_\lambda^k W(Z)$ $(k=1,2,3)$ 表示之. 例如，置 $n=l_1s_1+l_2s_2+\cdots+l_ps_p$，$l_j\leqslant s_j$ $(j=1,2,\cdots,p)$ 均为正整数. 取

$$G = GL(l_1, \mathbf{C}) \otimes I_{s_1} \oplus GL(l_2, \mathbf{C})$$
$$\otimes I_{s_2} \oplus \cdots \oplus GL(l_p, \mathbf{C}) \otimes I_{s_p}$$

即可. 我们特别通过讨论在矩阵空间 $\mathbf{C}^{m\times n}$上定义四点交比与 Schwarz 导数来具体说明之.

考虑 $\mathbf{C}^{mn}(m\leqslant n)$，显然 $\mathbf{C}^{mn}$同构于 $\mathbf{C}^{m\times n}$. 取 $GL(mn,\mathbf{C})$中的复子李群 $G=GL(m,\mathbf{C})\otimes I_n$，于是在 $\mathbf{C}^{mn}$与 $\mathbf{C}^{m\times n}$唯一的同构下，G 在 $\mathbf{C}^{mn}$上的作用变成 $GL(m,\mathbf{C})$作用在 $\mathbf{C}^{m\times n}$上，即左乘 $\mathbf{C}^{m\times n}$以$m\times m$方阵.

若 Z_1、Z_2、Z_3、$Z_4\in\mathbf{C}^{m\times n}$，且这四点的交比(2.3.1)存在，则(2.3.1)就是：

$$[Z_1,Z_2,Z_3,Z_4] = (Z_1 - Z_3)(Z_2 - Z_3)^{-1}(Z_2 - Z_4)(Z_1 - Z_4)^{-1}, \tag{2.3.3}$$

这里 $Z^{-1}=Z'(ZZ')^{-1}$为 $Z\in\mathbf{C}^{m\times n}$的广义逆. 也就是说，若四点 Z_1、Z_2、Z_3、Z_4的交比存在，则可以用广义逆来定义这四点的交比如(2.3.3).

当然，四点 Z_1、Z_2、Z_3、Z_4如按定义2.3.1，其交比不存在，但(2.3.3)的右端仍有意义. 然而这不能用来作为四点 Z_1、Z_2、Z_3、Z_4的交比的定义. 这是因为下面的定理(定理2.3.1)将证明：由定义2.3.1所定义的四点的交比存在或不存在，是在第一类典型域 $R_I^{(m,n)}$ 的紧对偶空间复 Grassman 流形 $CG(m,n)$的全纯自同构群作用下的不变性质. 且当交比存在时，这是在全纯自同构群作用下的相似不变量. 而如果用(2.3.3)作为四点交比的定义，则这个结果不成立. 所以不能用(2.3.3)作为四点交比的一般定义(只有当 $m=n$ 时才可以).

现在叙述并证明定理2.3.1.

定理2.3.1 若 $\mathbf{C}^{mn}(m\leqslant n)$中有四点，取 $G=GL(m,\mathbf{C})\otimes I_n$，如这四点按定义2.3.1所定义的四点交比存在，即在 $\mathbf{C}^{m\times n}$中相应的四点的交比存在，则在复 Grassman 流形 $CG(m,n)$的全纯自同构映照下得到的四个象点的交比也是存在的，且与原交比相似，即

四点交比若存在,则在 $CG(m,n)$ 的全纯自同构群作用下是相似不变的.

反之,若这四点的交比不存在,则在 $CG(m,n)$ 的全纯自同构映照下得到的四个象点的交比也是不存在的.

即四点的交比存在或不存在是在 $CG(m,n)$ 的全纯自同构群作用下的不变性质.

证　$CG(m,n)$可以看作 $\mathbf{C}^{m\times n}$添加无穷远点而得到的紧复流形,它的任一全纯自同构在 $\mathbf{C}^{m\times n}$中可表示为下式:

$$W(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \qquad (2.3.4)$$

其中 $A\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $B\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $C\in\mathbf{C}^{n\times m}$, $D\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $Z\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $W\in\mathbf{C}^{m\times n}$ $(m\leqslant n)$,且 $\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=1$.

当然,(2.3.4)还可以表示为如下等价的形式:

$$W(Z) = (ZC_1 + D_1)^{-1}(ZA_1 + B_1),$$

这里 $A_1\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $B_1\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $C_1\in\mathbf{C}^{n\times m}$, $D_1\in\mathbf{C}^{m\times m}$. 这只要取 A_1,B_1, C_1及 D_1满足下式:

$$\begin{pmatrix}D_1 & -B_1\\ -C_1 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}$$

即可. 由于 $\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=1$,有唯一的 A_1、B_1、C_1、D_1满足上述关系式. 反之亦真.

现在用(2.3.4)来证明本定理.

若 $\det D\neq 0$,则由

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m & 0\\ -C & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-BD^{-1}C & BD^{-1}\\ 0 & I_n\end{pmatrix},$$

即得 $\det(A-BD^{-1}C)=\det D^{-1}$.

若 $\det D=0$,则可找到 $Z_0\in\mathbf{C}^{m\times n}$,使得 $\det(CZ_0+D)\neq 0$,令 $\widetilde{D}=CZ_0+D$,且所有使 $\det\widetilde{D}\neq 0$的 Z_0所成的集是 $\mathbf{C}^{m\times n}$中的稠密开集. 令

$$\widetilde{B}= AZ_0 + B_0,\ Z = \xi + Z_0,$$

则有 $(AZ+B)(CZ+D)^{-1}=(A\xi+\widetilde{B})(C\xi+\widetilde{D})^{-1}$,

且 $$\begin{pmatrix} A & \widetilde{B} \\ C & \widetilde{D} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & AZ_0+B \\ C & CZ_0+D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & Z_0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

因此

$$\det\begin{pmatrix} A & \widetilde{B} \\ C & \widetilde{D} \end{pmatrix}=1.$$

再记 $Z_i=\xi_i+Z_0$ $(i=1,2,3,4)$,则有

$$[Z_1,Z_2,Z_3,Z_4]=[\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4].$$

因此,只需在 $\det D\neq 0$ 的前提下证明本定理.

显然

$$\begin{aligned}(AZ+B)(CZ+D)^{-1}-BD^{-1}&\\ &=(AZ+B)(D^{-1}CZ+I_n)^{-1}D^{-1}-BD^{-1}\\ &=[AZ+B-B(D^{-1}CZ+I_n)](D^{-1}CZ+I_n)^{-1}D^{-1}\\ &=(A-BD^{-1}C)Z(D^{-1}CZ+I_n)^{-1}D^{-1}\end{aligned}\tag{2.3.5}$$

及

$$Z(D^{-1}CZ+I_n)^{-1}=(ZD^{-1}C+I_m)^{-1}Z\tag{2.3.6}$$

成立. 记 $W_i=W(Z_i)$ $(i=1,2,3,4)$,由(2.3.4)、(2.3.5)及(2.3.6)得到

$$\begin{aligned}W_i-W_j&=(W_i-BD^{-1})-(W_j-BD^{-1})\\ &=(A-BD^{-1}C)(Z_iD^{-1}C+I_m)^{-1}Z_iD^{-1}\\ &\quad-(A-BD^{-1}C)Z_j(D^{-1}CZ_j+I_n)^{-1}D^{-1}\\ &=(A-BD^{-1}C)(Z_iD^{-1}C+I_m)^{-1}[Z_i(D^{-1}CZ_j+I_n)\\ &\quad-(Z_iD^{-1}C+I_m)Z_j](D^{-1}CZ_j+I_n)^{-1}D^{-1}\\ &=(A-BD^{-1}C)(Z_iD^{-1}C+I_m)^{-1}(Z_i-Z_j)(D^{-1}CZ_j\\ &\quad+I_n)^{-1}D^{-1}\\ &=P_i(Z_i-Z_j)Q_j,\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

这里 $P_i=(A-BD^{-1}C)(Z_iD^{-1}C+I_m)^{-1}$, $Q_j=(CZ_j+D)^{-1}$,P_i 及 Q_j 是存在的,否则,对 Z 作平移即可,而平移使交比不变. 当 $m=n$

时，广义矩阵的逆就是矩阵的逆，由(2.3.7)，有

$$
\begin{aligned}
[W_1,W_2,W_3,W_4] &= P_1(Z_1-Z_3)Q_3(P_2(Z_2-Z_3)Q_3)^{-1}\\
&\quad\times P_2(Z_2-Z_4)Q_4(P_1(Z_1-Z_4)Q_4)^{-1}\\
&= P_1[Z_1,Z_2,Z_3,Z_4]P_1^{-1}. \qquad (2.3.8)
\end{aligned}
$$

当 $m<n$ 时，且四点 Z_1、Z_2、Z_3、Z_4 的交比存在，即存在正则点 $X\in\mathbf{C}^{m\times n}$，使

$$Z_i-Z_j=A_{ij}X,\ A_{ij}\in G,\ (i,j)=(1,3)、(2,3)、(1,4)、(2,4).$$

由(2.3.7)就有

$$W_i-W_j=P_iA_{ij}XQ_j,\ (i,j)=(1,3)、(2,3)、(1,4)、(2,4).$$

由于 $P_iA_{ij}\in G$，故 W_1-W_3 与 W_2-W_3 属于同一正则轨道，W_1-W_4 与 W_2-W_4 也属于同一正则轨道. 因此只要证明 XQ_3 与 XQ_4 属于同一正则轨道，就可证明交比 $[W_1,W_2,W_3,W_4]$ 存在.

由于

$$
\begin{aligned}
XQ_3-XQ_4 &= X(CZ_3+D)^{-1}-X(CZ_4+D)^{-1}\\
&= X(CZ_3+D)^{-1}[CZ_4+D-CZ_3-D](CZ_4+D)^{-1}\\
&= XQ_3C(Z_4-Z_3)Q_4\\
&= XQ_3C(A_{13}-A_{14})XQ_4.
\end{aligned}
$$

因此

$$XQ_3=[I+XQ_3C(A_{13}-A_{14})]XQ_4\in G(XQ_4),$$

即 XQ_3 和 XQ_4 属于同一正则轨道. 因此若四点 Z_1、Z_2、Z_3、Z_4 的交比存在，则 W_1、W_2、W_3、W_4 的交比也存在.

此外，由(2.3.3)及(2.3.7)，可得

$$
\begin{aligned}
[W_1,W_2,W_3,W_4] &= (W_1-W_3)(W_2-W_3)^{-1}(W_2-W_4)\\
&\quad\times(W_1-W_4)^{-1}\\
&= P_1A_{13}XQ_3(P_2A_{23}XQ_3)'[P_2A_{23}XQ_3\\
&\quad\times(P_2A_{23}XQ_3)']^{-1}\\
&\quad\times P_2A_{24}XQ_4(P_1A_{14}XQ_4)'\\
&\quad\times[P_1A_{14}XQ_4(P_1A_{14}XQ_4)']^{-1}\\
&= P_1A_{13}(XQ_3Q'_3X')A'_{23}P'_2(P'_2)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$\times (A'_{23})^{-1}(XQ_3Q'_3X')^{-1}A_{23}^{-1}P_2^{-1}$$
$$\times P_2A_{24}(XQ_4Q'_4X')A'_{14}P'_1(P'_1)^{-1}(A'_{14})^{-1}$$
$$\times (XQ_4Q'_4X')^{-1}A_{14}^{-1}P_1^{-1}$$
$$= P_1A_{13}A_{23}^{-1}A_{24}A_{14}^{-1}P_1^{-1}$$
$$= P_1[Z_1,Z_2,Z_3,Z_4]P_1^{-1}. \tag{2.3.9}$$

(2.3.8)与(2.3.9)证明了：当 $m\leqslant n$ 时，Z_1、Z_2、Z_3、Z_4的四点交比存在，则在(2.3.4)的变换下得到的四点 W_1、W_2、W_3、W_4的交比也是存在的，且有关系式(2.3.8)及(2.3.9)，即这两个交比是相似的，即交比在(2.3.4)的变换下是相似不变量.

反之，若 Z_1、Z_2、Z_3、Z_4四点的交比不存在，现在来证明：在(2.3.4)映照下，其象 W_1、W_2、W_3、W_4 的四点的交比也是不存在的.

由(2.3.7)知，若 Z_1-Z_3与 Z_2-Z_3不属于同一正则轨道，则 W_1-W_3与 W_2-W_3也不属于同一正则轨道. 同理，若 Z_1-Z_4与 Z_2-Z_4 不属于同一正则轨道，则 W_1-W_4与W_2-W_4 也不属于同一正则轨道. 因此只需考虑Z_1-Z_3 与 Z_2-Z_3 属于同一正则轨道，且 Z_1-Z_4 与 Z_2-Z_4 属于同一正则轨道，而 Z_1-Z_3 与 Z_1-Z_4 不属于同一正则轨道. 此时，就有

$$Z_1 - Z_3 = A_{13}X,\ Z_2 - Z_3 = A_{23}X,$$
$$Z_1 - Z_4 = A_{14}Y,\ Z_2 - Z_4 = A_{24}Y,$$

这里 X 和 Y 为正则点，且 X、Y 不属于同一正则轨道. 由(2.3.7)，就有

$$W_1 - W_3 = P_1A_{13}XQ_3,\ W_2 - W_3 = P_2A_{23}XQ_3,$$
$$W_1 - W_4 = P_1A_{14}YQ_4,\ W_2 - W_4 = P_2A_{24}YQ_4.$$

于是只需证明 XQ_3 与 YQ_4 不属于同一正则轨道即可.

显然，$Q_3^{-1}-Q_4^{-1}=CZ_3+D-(CZ_4+D)=C(Z_3-Z_4)$，因此 $Q_3^{-1}=Q_4^{-1}+C(Z_3-Z_4)$，这导出

$$YQ_4Q_3^{-1} = Y(I_n + Q_4C(Z_3 - Z_4))$$
$$= Y + YQ_4C[Z_1 - Z_4 - (Z_1 - Z_3)]$$

$$= Y + YQ_4C(A_{14}Y - A_{13}X)$$

$$= (I_m + YQ_4CA_{14})Y - (YQ_4CA_{13})X. \qquad (2.3.10)$$

若 YQ_4 与 XQ_3 属于同一正则轨道，则存在 $\alpha \in GL(m,\mathbf{C})$，使得 $\alpha YQ_4 = XQ_3$，即 $\alpha YQ_4Q_3^{-1} = X$. 将 α 乘(2.3.10)的两端，就得

$$X = \alpha(I_m + YQ_4CA_{14})Y - \alpha(YQ_4CA_{13})X,$$

即

$$(I_m + \alpha YQ_4CA_{13})X = \alpha(I_m + YQ_4CA_{14})Y.$$

这说明 X、Y 属于同一正则轨道，导致矛盾. 因之，如果 X、Y 属于不同的正则轨道，则 XQ_3 和 YQ_4 也属于不同的正则轨道. 于是 W_1、W_2、W_3、W_4 四点的交比不存在. 即在(2.3.4)的映照下，四点交比存在或不存在是不会改变的.

这就证明了定理2.3.1.

由定理2.3.1及定义2.3.2，可得如下定理：

定理2.3.2 若 $W=W(Z):\Omega \subset \mathbf{C}^{m\times n} \to \mathbf{C}^{m\times n}$ 为 Ω 上的全纯映照，且有 $Z \in \Omega$, $0 \neq \lambda \in \mathbf{C}^{m\times n}$, W 在 Z 点沿 λ 方向的 Schwarz 导数 $\{W;Z\}_\lambda$ 存在，则 $\{W;Z\}_\lambda$ 是 $CG(m,n)$ 的全纯自同构群作用下的相似不变量.

显然，定理2.3.1及定理2.3.2推广了§2.2中相应的结果(定理2.2.1)，不仅从 $m=n$ 推广到 $m \leqslant n$，且将 R_1 的全纯自同构群推广到 $CG(m,n)$ 的全纯自同构群. 这样，当 $m=n=1$ 时，定理2.3.1及定理2.3.2就与单复变数函数的古典结果完全吻合了.

再来考察定义2.3.2在 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 的情形：

若 $W=W(Z):\Omega \subset \mathbf{C}^{m\times n} \to \mathbf{C}^{m\times n}$ 为 Ω 上的全纯映照，由 $G = GL(m,\mathbf{C}) \otimes I_n$，按定义2.3.2所定义的 Schwarz 方向导数是 $\{W;Z\}_\lambda$. 置

$$\{W;Z\}_\lambda^0 = D_\lambda^3 W(Z)(D_\lambda W(Z))^{-1} - \frac{3}{2}(D_\lambda^2 W(Z)(D_\lambda W(Z))^{-1})^2, \qquad (2.3.11)$$

此处矩阵的逆为矩阵的广义逆. 于是有：

1) 在 $J_W(Z)$ 非异且 $(D_\lambda W(Z))^{-1}$ 存在的点对 (Z,λ) 的集合上，$\{W;Z\}_\lambda^0$ 存在，且关于 Z, λ 全纯.

2) 若 $m=n$，当 $J_W(Z)$ 非异且 $D_\Lambda W(Z)$ 非异时，

$$\{W;Z\}_\Lambda=\{W;Z\}_\Lambda^0. \tag{2.3.12}$$

因此当 $m=n$ 时，定义2.3.2所定义的 Schwarz 导数与(2.2.5)是相一致的.

3) 若 $m<n$，则$\{W;Z\}_\Lambda$与$\{W;Z\}_\Lambda^0$是不相同的. $\{W;Z\}_\Lambda$是在复 Grassman 流形 $CG(m,n)$ 的全纯自同构群作用下的相似不变量. 但$\{W;Z\}_\Lambda^0$在 $CG(m,n)$ 的全纯自同构群作用下不是相似不变的. 若 Schwarz 导数$\{W;Z\}_\Lambda$存在，且 $(D_\Lambda W(Z))^{-1}$ 存在时，必有

$$\{W;Z\}_\Lambda=\{W;Z\}_\Lambda^0.$$

1)是显然成立的，现在来验证2)和3).

由于 $W(Z)$ 在 Ω 中全纯，取$|t|$充分小，$t\in\mathbf{C}$，可以将 W 在 Z 点展开成为 t 的幂级数：

$$W(Z+\alpha t\Lambda)=W(Z)+\alpha tB_1+\frac{\alpha^2t^2}{2}B_2+\frac{\alpha^3t^3}{6}B_3+\cdots,$$

这里 $B_k=D_\Lambda^kW(Z)$ $(k=1,2,3,\cdots)$为 W 在 Z 点沿方向 Λ 的各阶方向导数.

于是

$$\begin{aligned}
W_1-W_3&=-\beta t\left(B_1+\frac{1}{2}\beta tB_2+\frac{1}{6}\beta^2t^2B_3+\cdots\right),\\
W_2-W_3&=(\alpha-\beta)t\left(B_1+\frac{\alpha+\beta}{2}tB_2+\frac{\alpha^3+\alpha\beta+\beta^2}{6}t^2B_3+\cdots\right),\\
W_2-W_4&=(\alpha-\gamma)t\left(B_1+\frac{\alpha+\gamma}{2}tB_2+\frac{\alpha^3+\alpha\gamma+\gamma^2}{6}t^2B_3+\cdots\right),\\
W_1-W_4&=-\gamma t\left(B_1+\frac{1}{2}\gamma tB_2+\frac{1}{6}\gamma^2t^2B_3+\cdots\right).
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
(W_1-W_3)(W_2-W_3)'=&-\beta(\alpha-\beta)t^2\Big(I_m+\frac{\beta t}{2}B_2B_1^{-1}\\
&+\frac{(\alpha+\beta)t}{2}B_1B_2'(B_1B_1')^{-1}+\frac{\beta^2t^2}{6}B_3B_1^{-1}
\end{aligned}$$

$$+\frac{\beta(\alpha+\beta)}{4}t^2(B_2B_2')(B_1B_1')^{-1}$$

$$+\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{6}t^2B_1B_3'(B_1B_1')^{-1}+\cdots\Big)B_1B_1',$$

$$((W_2-W_3)(W_2-W_3)')^{-1}=(\alpha-\beta)^{-2}t^{-2}(B_1B_1')^{-1}$$

$$\times\Big(I_m-\frac{\alpha+\beta}{2}t(B_2B_1^{-1}+B_1B_2'(B_1B_1')^{-1})$$

$$-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2t^2B_2B_2'(B_1B_1')^{-1}-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{6}t^2(B_3B_1^{-1}$$

$$+B_1B_3'(B_1B_1')^{-1})+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2t^2(B_2B_1^{-1}+B_1B_2'(B_1B_1')^{-1})^2$$

$$+\cdots\Big),$$

$$(W_2-W_4)(W_1-W_4)'=-\gamma(\alpha-\gamma)t^2\Big(I_m+\frac{\alpha+\gamma}{2}tB_2B_1^{-1}$$

$$+\frac{\gamma}{2}tB_1B_2'(B_1B_1')^{-1}+\frac{\gamma(\alpha+\gamma)}{4}t^2B_2B_2'(B_1B_1')^{-1}$$

$$+\frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2}{6}t^2B_3B_1^{-1}+\frac{\gamma^2}{6}t^2B_1B_3'(B_1B_1')^{-1}+\cdots\Big)B_1B_1'$$

以及

$$((W_1-W_4)(W_1-W_4)')^{-1}=-\gamma^2t^{-2}(B_1B_1')^{-1}$$

$$\times\Big(I_m-\frac{\gamma}{2}t(B_2B_1^{-1}+B_1B_2'(B_1B_1')^{-1})-\frac{\gamma^2}{4}t^2B_2B_2'(B_1B_1')^{-1}$$

$$-\frac{\gamma^2}{6}t^2(B_3B_1^{-1}+B_1B_3'(B_1B_1')^{-1})$$

$$+\frac{\gamma^2}{4}t^2(B_2B_1^{-1}+B_1B_2'(B_1B_1')^{-1})^2+\cdots\Big).$$

但是

$$\begin{aligned}[W_1,W_2,W_3,W_4]&=A_{13}A_{23}^{-1}A_{24}A_{14}^{-1}\\&=(W_1-W_3)(W_2-W_3)^{-1}\\&\quad\times(W_2-W_4)(W_1-W_4)^{-1}.\end{aligned}$$

将前面四个式子代入到上式中，经过复杂计算，就得到

$$[W_1,W_2,W_3,W_4]=[0,\alpha,\beta,\gamma]\Big[I_m-\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{6}\Big(B_3B_1^{-1}-\frac{3}{2}(B_2B_1^{-1})^2\Big)t^2+\frac{\alpha(\gamma-\alpha-\beta)}{4}\times B_2(I-B_1^{-1}B_1)B_2'(B_1B_1')^{-1}t^2+\cdots\Big]. \tag{2.3.14}$$

由于 W_1,W_2,W_3,W_4 的四点交比存在，因此

$$W_2-W_3=A_{23}A_{13}^{-1}A_{13}X=A_{23}A_{13}^{-1}(W_1-W_3)=A(W_1-W_3), \tag{2.3.15}$$

这里 $A=A_{23}A_{13}^{-1}=A(t,Z,\Lambda)\in\mathbb{C}^{m\times m}$，当 $\det(D_\Lambda W(Z)(D_\Lambda W(Z))')\neq 0$ 时，A 在 $t=0$ 的附近是 t 的全纯函数，将 A 在 $t=0$ 处附近展开成幂级数：

$$A(t,Z,\Lambda)=A_0(Z,\Lambda)+tA_1(Z,\Lambda)+t^2A_2(Z,\Lambda)+\cdots. \tag{2.3.16}$$

将(2.3.13)、(2.3.16)代入(2.3.15)，就有

$$(\alpha-\beta)t\Big(B_1+\frac{\alpha+\beta}{2}tB_2+\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{6}t^2B_3+\cdots\Big)=(A_0+tA_1+t^2A_2+\cdots)(-\beta t)\times\Big(B_1+\frac{1}{2}\beta tB_2+\frac{1}{6}\beta^2t^2B_3+\cdots\Big),$$

比较两边 t 的系数，就有

$$(\alpha-\beta)B_1=-\beta A_0B_1,$$

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}B_2=\Big(A_1B_1+\frac{1}{2}\beta A_0B_2\Big)(-\beta),$$

$$\cdots\cdots\cdots.$$

于是就有 $B_2=CB_1$，这里 $C=C(Z,\Lambda)\in\mathbb{C}^{m\times m}$，即

$$D_\Lambda^2W(Z)=C(Z,\Lambda)D_\Lambda W(Z) \tag{2.3.17}$$

成立. 由(2.3.17)，即可得到

$$B_2(I_m-B_1^{-1}B_1)B_2'(B_1B_1')^{-1}=CB_1B_1'C'(B_1B_1')^{-1}$$

$$-CB_1B_1^{-1}B_1B_1'C'(B_1B_1')^{-1}=0.$$

将上式代入(2.3.14),就有

$$[W_1,W_2,W_3,W_4]=[0,\alpha,\beta,\gamma]\Big[I_m-\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{6}\Big(B_3B_1^{-1}-\frac{3}{2}(B_2B_1^{-1})^2\Big)t^2+\cdots\Big].$$

由此立即看出,由定义2.3.2中所定义的 Schwarz 导数如果存在,就是(2.3.11).

因此只有在(2.3.2)有意义的情况下(2.3.11)才与(2.3.2)相互等价.即也可用(2.3.11)作为 Schwarz 导数的定义.

现在可以来证明如下定理:

定理2.3.3　若 $W=W(Z):\Omega\subset\mathbf{C}^{m\times n}\to\Omega^{m\times n}$ 为域 Ω 中的全纯映照,$Z_0\in\Omega$, W 在 Z_0 的 Jacohian $J_W(Z_0)$ 非异,则 $\{W;Z\}_{Z-Z_0}=0$ 在 Ω 的一个稠密开子集 Σ 上成立的充要条件为:

1) 当 $m=n$ 时,则

$$W(Z)=W(Z_0)+(I-L(Z_0)-L(Z))^{-1}D_{Z-Z_0}W(Z_0),$$

或 $$W(Z)=W(Z_0)+D_{Z-Z_0}W(Z_0)(I-L(Z_0)-L(Z))^{-1};$$

2) 当 $m<n$ 时,则

$$W(Z)=W(Z_0)+(I-L(Z_0)-L(Z))^{-1}D_{Z-Z_0}W(Z_0),$$

这里 $L(Z)$ 为 $m\times m$ 方阵,每个元素都是 Z 的元素的一次齐次多项式.$I-L(Z_0)-L(Z)$ 在 Ω 中非异.

如同在§2.2中那样,可以证明,这些 $W(Z)$ 在 Ω 中为双全纯.

如同在§2.2中那样,1)和2)的映照还可写成:

1) 当 $m=n$ 时,则

$$W(Z)=(C(Z)+D)^{-1}(A(Z)+B),$$

或 $$W(Z)=(A(Z)+B)(C(Z)+D)^{-1};$$

2) 当 $m<n$ 时,则 $W(Z)=(C(Z)+D)^{-1}(A(Z)+B)$,这里 $C(Z)$、$D\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $A(Z)$、$B\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $A(Z)$和$C(Z)$的元素都是Z的元素的一次齐次多项式, $C(Z)+D$ 在 Ω 中非异,且 $J_W(Z_0)$ 非异.

定理2.3.3中的1)或2)所给出的映照类，当$1=m<n$时，就是$CG(1,n)=CP^n$的全纯自同构群，这将在下一节中进一步讨论.而当$2\leqslant m\leqslant n$时，由1)或2)所给出的映照类中的一个真子类就是复 Grassman 流形$CG(m,n)$的全纯自同构群.如果对由1)或2)所给出的映照类加上适当的条件，例如某种交比的条件，就可证明，这样的映照就是复 Grassman 流形$CG(m,n)$的全纯自同构群.

故当$1=m\leqslant n$时，Schwarz 导数完全刻画了$CG(1,n)=CP^n$；而当$2\leqslant m\leqslant n$时，Schwarz 导数在本质上也刻画了$CG(m,n)$.而上述的差异又反映了秩为1的 Hermitian 对称空间与秩$\geqslant 2$的 Hermitian对称空间的几何函数论中问题的差异.

为了证明上述定理，需要以下两条引理：

引理2.3.1 若$V\in C^{m\times n}$，$m<n$，则

1) 当$m=1$，$n=2$时，$\det VV'$是V的元素的两个线性无关的一次齐次多项式的积；

2) 对其余的$m<n$，$\det VV'$不可约.

证 设$\det VV'$可约，则有

$$\det VV' = L_1(V)L_2(V), \qquad (2.3.18)$$

这里$L_1(V)$是V的元素的k次齐次多项式，$L_2(V)$是V的元素的$2m-k$次齐次多项式，$1\leqslant k<2m$.

若β为$n\times n$对角线方阵，在对角线上，有m个元素为1，其余各个元素均为零，则$V\beta$是$m\times n$矩阵，其中$n-m$列为零，删去这些零列后，得到一个$m\times m$方阵，记作V_β.在(2.3.18)中以V_β替代V，即得

$$(\det V_\beta)^2 = L_1(V\beta)L_2(V\beta).$$

由引理2.2.1，$\det V_\beta$不可约，所以只能取

$$L_1(V\beta) = A_\beta\det V_\beta,\ L_2(V\beta) = B_\beta\det V_\beta, \qquad (2.3.19)$$

这里A_β和B_β为常数，且$A_\beta B_\beta=1$.显然(2.3.19)对所有的V_β都成立.

另一方面，我们知道

$$\det VV' = \sum_{\beta}(\det V_{\beta})^2. \qquad (2.3.20)$$

由于所有的 $\det V_{\beta}$ 是彼此线性无关的 m 次齐次多项式，它可以扩张成 V 的元素的 m 次齐次多项式的一组基，即

$$L_1(V) = \sum_{\beta} a_{\beta}\det V_{\beta} + \text{其余项};$$

$$L_2(V) = \sum_{\beta} b_{\beta}\det V_{\beta} + \text{其余项},$$

这里 a_{β}、b_{β} 为常数，且适合 $a_{\beta}b_{\beta}=1$. 由(2.3.19)可知

$$L_1(V) = \sum_{\beta} a_{\beta}\det V_{\beta},\ L_2(V) = \sum_{\beta} b_{\beta}\det V_{\beta}.$$

由(2.3.20)可知，当 $m<n$ 时，若 $\det VV'$ 可约，则有

$$\sum_{\beta}(\det V_{\beta})^2 = \Big(\sum_{\beta} a_{\beta}\det V_{\beta}\Big)\Big(\sum_{\gamma} b_{\gamma}\det V_{\gamma}\Big).$$

β 共有 C_m^n 个，于是要上式成立，除非有下式成立：

$$\begin{cases} a_{\beta}b_{\beta} = 1, & \beta = 1,2,\cdots,C_m^n; \\ a_{\beta}b_{\gamma} + a_{\gamma}b_{\beta} = 0, & \beta < \gamma;\ \beta,\gamma = 1,2,\cdots,C_m^n. \end{cases}$$

这里共有 $2C_m^n$ 个变数，$\frac{1}{2}C_m^n(C_m^n+1)$ 个方程，要方程有解，除非

$$2C_m^n \geqslant \frac{1}{2}C_m^n(C_m^n+1),$$

即 $3\geqslant C_m^n$，这时只有 $m=1$，$n=2$；$m=1$，$n=3$；$m=2$，$n=3$. 但当 $m=1$，$n=3$ 或 $m=2$，$n=3$ 时，方程组成为

$$\begin{cases} a_1b_1 = 1,\ a_2b_1 = 1,\ a_3b_3 = 1; \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 0,\ a_1b_3 + a_3b_1 = 0,\ a_2b_3 + a_3b_2 = 0. \end{cases}$$

由 $a_1b_1=1$，$a_2b_2=1$ 及 $a_1b_2+a_2b_1=0$ 导出 $a_1^2+a_2^2=0$，即 $a_1=\pm ia_2$，同样可得 $a_2=\pm ia_3$，$a_3=\pm ia_1$. 但这三个方程是相互矛盾的，故方程无解. 只有在 $m=1$，$n=2$ 时，方程才有解. 这就证明了引理2.3.1.

由引理2.3.1可得如下引理：

引理2.3.2　若 $V\in \mathbf{C}^{m\times n}$，$m<n$，$A$ 和 B 是两个 $m\times m$ 方阵，其元素都是 V 的元素的三次齐次多项式，$(VV')^*$ 是 VV' 的代数余子式. 如果 $A(VV')^*B$ 的每一个元素都可以被 $\det VV'$ 所整除，则

必有 $A=L(V)VV'$ 或 $B=VV'R(V)$，这里 $L(V)$、$R(V)$ 的元素都是 V 的元素的一次齐次多项式.

引理2.3.2的证明类似于引理2.2.3的证明，在此从略.

现在来证明定理2.3.3.

定理2.3.3的1)就是定理2.2.2，所以只需证明2). 先证必要性，即 $Z_0\in\Omega$，$J_W(Z_0)$ 非异，$\{W;Z\}_{Z=Z_0}=0$ 在 Σ 上成立. $W(Z)$ 必为2)中的映照.

不失一般性，可设 $Z_0=0$，从而 $\{W;Z\}=0$在 Σ 上成立. 易证这等价于 $\{W;uZ\}_Z\equiv 0$，这里 $uZ\in\Sigma, u\neq 0, u\in\mathbf{C}$. 令 $u\to 0$，就有 $\{W;O\}_Z^0\equiv 0$，由于 $J_W(0)$ 非异，故可取 $Z\in\mathbf{C}^{m\times n}$，使得 $D_ZW(0)$非异. 于是由(2.3.11)，有

$$D_Z^3W(0)(D_ZW(0))^{-1}-\frac{3}{2}(D_Z^2W(0))(D_ZW(0))^{-1}\times(D_Z^2W(0))(D_ZW(0))^{-1}\equiv 0,$$

此即

$$\begin{aligned}&D_Z^3W(0)(D_ZW(0))'[D_ZW(0)(D_ZW(0))']^{-1}\\&-\frac{3}{2}D_Z^2W(0)(D_Z^2W(0))'[D_ZW(0)(D_ZW(0))']^{-1}\\&\times(D_Z^2W(0))(D_ZW(0))'[D_ZW(0)(D_ZW(0))']^{-1}\equiv 0.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&D_Z^3W(0)(D_ZW(0))'-\frac{3}{2}D_Z^2W(0)(D_ZW(0))'\\&\times[D_ZW(0)(D_ZW(0))']^{-1}D_Z^2W(0)(D_ZW(0))'\equiv 0.\end{aligned}$$

令 $V=D_ZW(0)$，于是上式成为

$$D_Z^3W(0)V'=\frac{3}{2}D_Z^2W(0)V'(VV')^*D_Z^2W(0)V'(\det VV')^{-1}$$

这里 $(VV')^*$ 为 VV' 的代数余子式. 也就是说，$\det VV'$ 可以除尽 $D_Z^2W(0)V'(VV')^*D_Z^2W(0)V'$ 的每一个元素. $D_Z^3W(0)V'$ 的每个元素都是 Z 的元素的三次齐次多项式. 因此也是 V 的元素的三次齐次多项式. 由引理2.3.2可知，$D_Z^3W(0)V'$ 或是 $L(V)VV'$，或是 $VV'R(V)$，这里 $L(V)$、$R(V)$ 的元素都是 V 的元素的一次齐次多

项式.

另外,由(2.3.17),对 $uZ\in\Sigma$,有

$$D_Z^2W(uZ)=C(uZ,Z)D_ZW(uZ). \qquad (2.3.21)$$

显然,$C(uZ,Z)$对使$(D_ZW(0))^{-1}$有意义的每个 $Z\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 在 $u=0$ 的一个依赖于 Z 的邻域中是 u 的全纯映照.对(2.3.21)求导,得

$$D_Z^3W(uZ)=D_ZC(uZ,Z)D_ZW(uZ)+C^2(uZ,Z)D_ZW(uZ).$$

将上式及(2.3.21)代入 $\{W,uZ\}_Z\equiv 0$, 就有

$$D_Z^3W(uZ)(D_ZW(uZ))^{-1}-\frac{3}{2}(D_Z^2W(uZ)(D_ZW(uZ))^{-1})^2$$

$$=D_ZC(uZ,Z)+C^2(uZ,Z)-\frac{3}{2}C^2(uZ,Z)=0.$$

因此

$$D_ZC(uZ,Z)=\frac{1}{2}C^2(uZ,Z) \qquad (2.3.22)$$

成立.现在用数学归纳法来证明:对几乎所有的 $Z\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$uZ\in\Omega$,在 $u=0$ 的一个邻域中有

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^kC(uZ,Z)=2^{-k}k!(C(uZ,Z))^{k+1}\quad(k=1,2,\cdots). \qquad (2.3.23)$$

当 $k=1$,(2.3.23)就是(2.3.22).

若(2.3.23)当 $k=l$ 时成立,则由(2.3.22),有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{l+1}C(uZ,Z)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[2^{-l}l!(C(uZ,Z))^{l+1}]\\&=2^{-l}l!(l+1)(C(uZ,Z))^l\frac{1}{2}(C(uZ,Z))^2\\&=2^{-(l+1)}(l+1)!(C(uZ,Z))^{l+2}.\end{aligned}$$

因此(2.3.23)对 $k=1,2,\cdots$都成立.

再来用数学归纳法来证明:对几乎所有的 $Z\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $uZ\in\Omega$,在 $u=0$ 的一个邻域中有

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{k+1}W(uZ)=2^{-k}(k+1)!(C(uZ,Z))^kD_ZW(uZ)$$

$$(k=1,2,\cdots) \tag{2.3.24}$$

当 $k=1$ 时，(2.3.24)就是(2.3.21).

若 $k=l$ 时，(2.3.24)成立，则由(2.3.21)及(2.3.22)，有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{l+1}W(uZ) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[2^{-l}(l+1)!(C(uZ,Z))^l D_Z W(uZ)] \\ &= 2^{-l}(l+1)!\Big[l(C(uZ,Z))^{l-1} \\ &\quad \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}C(uZ,Z)D_Z W(uZ) \\ &\quad + (C(uZ,Z))^l D_Z^2 W(uZ)\Big] \\ &= 2^{-l}(l+1)!\Big[l(C(uZ,Z))^{l-1} \\ &\quad \times \frac{1}{2}(C(uZ,Z))^2 D_Z W(uZ) \\ &\quad + (C(uZ,Z))^l C(uZ,Z) D_Z W(uZ)\Big] \\ &= 2^{-(l+1)}(l+2)!(C(uZ,Z))^{l+1}D_Z W(uZ).\end{aligned}$$

因此(2.3.24)对 $k=1,2,\cdots$ 都成立.

在(2.3.24)中令 $u=0$，则有

$$D_Z^{(k+1)}W(0) = 2^{-k}(k+1)!(C(0,Z))^k D_Z W(0) \quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.3.25}$$

若 $D_Z^2 W(0)V' = L(V)VV'$ 成立，即

$$D_Z^2 W(0)(D_Z W(0))' = L(D_Z W(0))D_Z W(0)(D_Z W(0))' \tag{2.3.26}$$

成立. 当 $k=1$ 时，(2.3.25)成为

$$D_Z^2 W(0) = C(0,Z)D_Z W(0). \tag{2.3.27}$$

上式两端右乘以 $(D_Z W(0))'$，得到

$$D_Z^2 W(0)(D_Z W(0))' = C(0,Z)D_Z W(0)(D_Z W(0))'.$$

由上式与(2.3.26)，即有

$$L(D_Z W(0))D_Z W(0)(D_Z W(0))' = C(0,Z)D_Z W(0)(D_Z W(0))'.$$

因此 $L(D_Z W(0))=C(0,Z)$ 对所有 $Z\in\Omega$ 及 $D_Z W(0)$ 非异的点都成立. 由于 $L(V)$ 的每个元素都是 V 的一次齐次多项式，而 $V=$

$D_ZW(0)$的每个元素都是 Z 的元素的一次齐次多项式,因此,$L(D_ZW(0))$的每个元素都是 Z 的元素的一次齐次多项式. 由于 $L(D_ZW(0))=C(0,Z)$及它们都是 Z 的连续函数,因此,对所有 $Z\in\Omega$,$C(0,Z)$的每个元素都是 Z 的元素的一次齐次多项式.

由于 $W(Z)$ 在 Ω 中全纯,在 $W=0$ 处可以展开成

$$W(Z)=W(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}D_Z^{(k)}W(0).$$

将(2. 3. 25)代入上式,就有

$$W(Z)=W(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}(C_0(Z))^{k-1}D_ZW(0), \tag{2.3.28}$$

这里 $C_0(Z)=C(0,Z)$. 于是有

$$W(Z)=W(0)+\left(I-\frac{1}{2}C_0(Z)\right)^{-1}D_ZW(0).$$

而这就是

$$W(Z)=(C(Z)+D)^{-1}(A(Z)+B)$$

的形式,这里 $A(Z)$、$B\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $C(Z)$、$D\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $A(Z)$、$C(Z)$的元素都是 Z 的元素的一次齐次多项式.

由于 $W(Z)$是 Ω 中的全纯映照,故 $I-\frac{1}{2}C_0(Z)$在 Ω 中非异,记 $\frac{1}{2}C_0(Z)=L(Z)$, 即得定理2. 3. 3中2)的 $W(Z)$. 至于这样的 $W(Z)$在 Ω 中双全纯的证明与 $m=n$ 时一样,就不在此重复了.

另一种可能是 $D_Z^2W(0)V'=VV'R(V)$ 成立.

要证明在定理的假设下,仍归结为前面的情形. 这可证明如下:

由(2. 3. 27),得到

$$\begin{aligned}C(0,Z)&=D_Z^2W(0)V^{-1}=D_Z^2W(0)V'(VV')^{-1}\\&=D_Z^2W(0)V'(VV')^{*}\det(VV')^{-1}.\end{aligned}$$

将上式代入(2. 3. 27),就有

$$D_Z^2W(0)=D_Z^2W(0)V'(VV')^{*}V\det(VV')^{-1}.$$

上式左端的矩阵中每个元素都是 Z 的元素的二次齐次多项式,

因而也是 V 的元素的二次齐次多项式. 故上式右端的矩阵 $D_z^2W(0)V'(VV')^*V$ 的每个元素都被 $\det(VV')$ 所整除. 若 H 为 $m\times m$ 方阵,其每个元素都是 V 的元素的二次齐次多项式,则 $D_z^2W(0)V'(VV')^*VH$ 的每个元素都被 $\det(VV')$ 所整除.

若 $D_z^2W(0)V'=VV'R(V)$ 成立，则

$$D_z^2W(0)V'(VV')^*D_z^2W(0)V'=D_z^2W(0)V'(VV')^*VV'R(V).$$

已知上式左端的每个元素都可被 $\det VV'$ 所整除,因而上式右端的每个元素也可被 $\det VV'$ 所整除. 于是

$$\begin{aligned}&D_z^2W(0)V'(VV')^*VV'R(V)+D_z^2W(0)(VV')^*VH\\&=D_z^2W(0)V'(VV')^*V[V'R(V)+H]\end{aligned}$$

的每个元素均可被 $\det VV'$ 所整除. 取

$$H=BV'T(V)-V'R(V),$$

这里 $B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 为 $n\times n$ 方阵，b_{ij} 均为常数，$\det B\neq 0$，$b_{ij}\neq 0$,当 $i\neq j$ 时，$T(V)$ 为 $m\times m$ 方阵,每个元素都是 V 的元素的一次齐次多项式. 于是

$$D_z^2W(0)V'(VV')^*VBV'T(V)$$

的每个元素都可被 $\det VV'$ 所整除. 由引理2.3.2得到

$$VBV'T(V)=VV'S(V)\ \text{或}\ D_z^2W(0)V'=L_1(V)VV',$$

这里 $S(V)$、$L_1(V)$ 为 $m\times m$ 方阵,每个元素都是 V 的元素的一次齐次多项式. 于是,若前者成立,则

$$(VV')^{-1}VBV'T(V)=S(V). \tag{2.3.29}$$

V 的每个元素都是独立变量. 若

$$V=\begin{bmatrix}v_{11}&\cdots&v_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\v_{m1}&\cdots&v_{mn}\end{bmatrix},\quad \text{则取 } T(V)=\begin{bmatrix}v_{11}&\cdots&v_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\v_{m1}&\cdots&v_{mm}\end{bmatrix},$$

代入(2.3.29)式,得

$$(VV')^{-1}VBV'\begin{bmatrix}v_{11}&\cdots&v_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\v_{m1}&\cdots&v_{mm}\end{bmatrix}=S\left(\begin{bmatrix}v_{11}&\cdots&v_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\v_{m1}&\cdots&v_{mn}\end{bmatrix}\right).$$

对所有 V 都成立. 特别取 $v_{ii}\neq 0$ $(i=1,\cdots,m)$，$v_{ij}=0$，若 $i\neq j$，

则上式成为：

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} v_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_{mm}^{-1} \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} v_{11}^{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & v_{mm}^{2} \end{matrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= S \begin{pmatrix} v_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_{mm} \end{pmatrix}. \qquad (2.3.30)$$

上式左端为$(v_{ii}^{-1}b_{ij}v_{jj}^{2})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$，当 $m\geqslant 2$时，可取到 $b_{ij}\neq 0$，当 $i\neq j$ 时$(i,j=1,2,\cdots,m)$，则 $v_{ii}^{-1}b_{ij}v_{ij}$为 V 的元素的有理分式，而不是多项式. 但(2.3.30)的右端的每个元素为 V 的元素的一次齐次多项式. 导致矛盾. 所以，如果

$$D_Z^2W(0)V' = VV'R(V)$$

成立，仍得到

$$D_Z^2W(0)V' = L_1(V)VV'$$

成立，即归入到前一种情形. 而当 $m=1$ 时，VV' 为一个复数，故 $VV'R(V)=R(V)VV'$，也可归入到

$$D_Z^2W(0)V' = L(V)VV'$$

的情形. 因而定理2.3.3的必要性得到证明.

至于定理2.3.3的充分性，可由 Schwarz 导数的定义经直接计算而验证成立. 1)、2)的映照在 Ω 中双全纯的证明与定理2.2.2中的证明一样，在此从略.

不但如此，定理2.3.3中1)及2)的映照，由直接计算可以得到$\{W;Z\}_\lambda=0$对任意$0\neq\lambda\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$Z\in\Omega$ 都成立. 因而可得如下的系：

系 2.3.1　假设如定理2.3.3，则$\{W;Z\}_{Z-Z_0}=0$导出$\{W;Z\}_\lambda=0$，对任意 $Z\in\Omega$，$0\neq\lambda\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 都成立，即两者是等价的.

§ 2.4　$\mathbf{C}^n$ 上全纯映照的 Schwarz 导数

在 § 2.2及 § 2.3中用交比的无穷小形式定义了典型域及矩阵空间上的全纯映照的 Schwarz 导数. 在这一节中，将继续按照这个

观点来进一步讨论 $\mathbf{C}^n$ 上全纯映照的 Schwarz 导数.

若 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 为域,

$$W = W(Z) : \Omega \subset \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$$

为全纯映照. 点 $Z \in \Omega$, 其 Jacobian $J_W(Z)$ 非异. 令

$$l = \{Z + u\lambda; u \in \mathbf{C}, |u\lambda| < \varepsilon\}$$

为过 z 点、方向为 λ 的复直线段, 这里 $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{C}^n$, $\varepsilon > 0$. 令

$$Z_i = u + u_i\lambda \in l \quad (u = 1,2,3,4).$$

当 ε 充分小时, $Z_i \in \Omega \quad (i = 1,2,3,4)$. 若有列向量 $X \in \mathbf{C}^n$, 使得

$$W(Z_i) - W(Z_j) = A_{ij}X,$$

而 $A_{ij} \in GL(n,\mathbf{C})$, X 为关于 $GL(n,\mathbf{C})$ 的正则点, 这里 W 看作列向量. 于是按定义2.3.1, 可以定义 $W(Z_i)$ $(i = 1,2,3,4)$ 这四点的交比为:

$$[W(Z_1), W(Z_2), W(Z_3), W(Z_4)] = A_{13}A_{23}^{-1}A_{24}A_{14}^{-1}.$$

于是可按定义2.3.2来定义一种 W 的 Schwarz 导数.

将 W 在 Z 点展开成幂级数, 给定 λ, 有 $\varepsilon > 0$, 使得当 $|t| < \varepsilon$ 时,

$$W(Z + t\lambda) = W(Z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D_\lambda^k W(Z) \qquad (2.4.1)$$

成立, 这里 $D_\lambda^k W(Z)$ 为 W 在 Z 点沿 λ 方向的方向导数.

记 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)'$, $W = (W_1, \cdots, W_n)'$ 为列向量, 于是

$$D_\lambda^k W(Z) = P^{(k)}(Z,\lambda)\lambda, \qquad (2.4.2)$$

这里 $P^{(k)}(Z,\lambda) = (P_{ij}^{(k)}(Z,\lambda))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, 而

$$P_{ij}^{(k)}(Z,\lambda) = \sum_{l_2,\cdots,l_k} \lambda_{l_2} \cdots \lambda_{l_k} \frac{\partial^k W_i(Z)}{\partial z_j \partial z_{l_2} \cdots \partial z_{l_k}}.$$

显然有 $D_\lambda W(Z) = J_W(Z)\lambda$, 以及

$$D_\lambda^k W(Z) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k W(Z + t\lambda)\Big|_{t=0},$$

$$D_\lambda P^{(k)}(Z,\lambda) = P^{(k+1)}(Z,\lambda).$$

将(2.4.2)代入(2.4.1), 就有

$$W(Z + t\lambda) = W(Z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P^{(k)}(Z,\lambda)\lambda.$$

因此

$$W(Z_i)-W(Z_j)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_i^k-u_j^k}{k!}P^{(k)}(Z,\lambda)\lambda$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_i^k-u_j^k}{k!}P^{(k)}(Z,\lambda)(J_W(Z))^{-1}J_W(Z)\lambda$$
$$=A_{ij}J_W(Z)\lambda,\tag{2.4.3}$$

这也可写成

$$W(Z_i)-W(Z_j)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_i^k-u_j^k}{k!}J_W(Z)(J_W(Z))^{-1}P^{(k)}(Z,\lambda)\lambda$$
$$=J_W(Z)B_{ij}\lambda,$$

这里

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_i^k-u_j^k}{k!}P^{(k)}(Z,\lambda)(J_W(Z))^{-1},\tag{2.4.4}$$

$$B_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_i^k-u_j^k}{k!}(J_W(Z))^{-1}P^{(k)}(Z,\lambda).\tag{2.4.5}$$

在(2.4.3)中取 $X=J_W(Z)\lambda$，由于 $J_W(Z)$ 非异及 $\lambda\neq0$，故 X 是关于 $GL(n,C)$ 的正则点. 于是 $W(Z_i)$ $(i=1,2,3,4)$ 这四点的交比可定义为：

$$[W(Z_1),W(Z_2),W(Z_3),W(Z_4)]=A_{13}A_{23}^{-1}A_{24}A_{14}^{-1},$$

这里 A_{ij} 由(2.4.4)所定义. 从这里可以看出：只要 $Z_1,Z_2,Z_3,Z_4\in\Omega$，且互不相等，$J_W(Z)$ 非异，那么 $W(Z_1)$、$W(Z_2)$、$W(Z_3)$、$W(Z_4)$ 的四点交比总是存在的. 由(2.4.4)及(2.4.5)就有

$$J_W(Z)B_{ij}(J_W(Z))^{-1}=A_{ij},$$

因此

$$[W(Z_1),W(Z_2),W(Z_3),W(Z_4)]=J_W(Z)B_{13}B_{23}^{-1}B_{14}B_{14}^{-1}(J_W(Z))^{-1}.$$

如果令

$$[W(Z_1),W(Z_2),W(Z_3),W(Z_4)]^{\sim}=B_{13}B_{23}^{-1}B_{24}B_{14}^{-1},\tag{2.4.6}$$

那么

$$[W(Z_1),W(Z_2),W(Z_3),W(Z_4)]^{\sim}$$

$$= (J_W(Z)_1)^{-1}[W(Z_1),W(Z_2),W(Z_3),W(Z_4)]J_W(Z). \tag{2.4.7}$$

现在用定义2.3.2,进行计算 W 在 Z 点沿 λ 方向的 Schwarz 导数.

令 $u_i=v_is$, s、$v_i\in\mathbf{C}$ $(i=1,2,3,4)$,则

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_i^k-v_j^k}{k!}P^{(k)}(Z,\lambda)(J_W(Z))^{-1}s^k \\ &= (v_i-v_j)s\Big(I+\frac{v_i+v_j}{2!}P^{(2)}(Z,\lambda)(J_W(Z))^{-1}s \\ &\quad +\frac{v_1^2+v_1v_2+v_2^2}{3!}P^{(3)}(Z,\lambda)(J_W(Z))^{-1}s^2+\cdots\Big), \end{aligned}$$

代入到(2.3.2)中经过复杂计算,就可得到

$$\{W;Z\}_{\lambda,B} = P^{(3)}(Z,\lambda)(J_W(Z))^{-1} - \frac{3}{2}(P^{(2)}(Z,\lambda)(J_W(Z))^{-1})^2, \tag{2.4.8}$$

$\{W;Z\}_{\lambda,B}$称为 W 在 Z 点沿方向 λ 的大 Schwarz 导数.同样,如果有点 $Z_0\in\Omega$,且 $J_W(Z_0)$非异,可以定义$\{W,Z\}_{Z-Z_0,B}$为 W 在 Z 点关于 Z_0点的大 Schwarz 导数,当$0\in\Omega$ 时,取 $Z_0=0$,记 $\{W,Z\}_{Z,B}$为$\{W,Z\}_B$, 并称为 W 在 Z 点的大 Schwarz 导数.

如果用(2.4.6)作为另一种交比的定义,则由此可得到另一种大 Schwarz 导数 $\{W,Z\}_{\lambda,B}^{\sim}$. 由(2.4.7)即得

$$\{W,Z\}_{\lambda,B}^{\sim} = (J_W(Z))^{-1}P^{(3)}(z,\lambda) - \frac{3}{2}((J_W(Z))^{-1}P^{(2)}(z,\lambda))^2.$$

因此

$$\{W,Z\}_{\lambda,B}^{\sim} = (J_W(Z))^{-1}\{W,Z\}_{\lambda,B}J_W(Z).$$

也就是说:这两种大 Schwarz 导数是相似的.

综上所述,只要 $z_i\in l$ $(i=1,2,3,4)$,则 $W(z_i)$ $(i=1,2,3,4)$ 这四点的交比存在.因此只要 $J_W(Z)$非异,就可以定义 W 在 Z 点沿 $\lambda(\neq0)$方向的大 Schwarz 导数(2.4.8),可以证明如下的定理:

定理2.4.1 若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为域,$W=W(Z):\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为 Ω 上的全纯映照, $Z\in\Omega$, $J_W(Z)$非异,则由(2.4.8)所定义的大 Schwarz

导数 $\{W;Z\}_{\lambda,B}$ 是在 $\mathbf{CP}^n$ 的全纯自同构群作用下的相似不变量.

定理2.4.2 若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为域，$W=W(Z):\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为 Ω 上的全纯映照，且 $Z_0\in\Omega$，W 在点 Z_0 的 Jacobian $J_W(Z_0)$ 非异，则 $\{W,Z\}_{Z-Z_0,B}\equiv 0$ 对 $Z\in\Omega$ 都成立的充要条件为：

$$W(Z)=W(Z_0)+\left(I_n-\frac{1}{2}P^{(2)}(Z_0,Z-Z_0)(J_W(Z_0))^{-1}\right)^{-1}\times J_W(Z_0)(Z-Z_0), \tag{2.4.9}$$

这里 W、Z 均为列向量，$P^{(2)}(Z_0,Z)=(p_{ij}^{(2)}(Z_0,Z))$，而 $p_{ij}^{(2)}(Z_0,Z)=\sum_l Z_l\frac{\partial^2 W_i(Z_0)}{\partial z_j\partial z_l}$ 是 Z 的元素的一次齐次多项式，且当 Ω 为凸域时，$W(Z)$ 在 Ω 上双全纯映照 $I_n-\frac{1}{2}P^{(2)}(Z_0,Z-Z_0)(J_W(Z_0))^{-1}$ 在 Ω 中非异. 显然(2.4.9)还可以写成

$$W(Z)=(C(Z)+D)^{-1}(A(Z)+B)$$

的形式，这里 $C(Z)$、$D\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$A(Z)$、$B\in\mathbf{C}^{n\times 1}$，$A(Z)$ 和 $C(Z)$ 的元素都是 Z 的元素的一次齐次多项式，$C(Z)+D$ 在 Ω 上非异，且 $J_W(Z_0)$ 非异.

定理2.4.1的证明与定理2.3.2的证明相似，在此从略.

现在来证明定理2.4.2：充分性可直接验证；下面证明必要性：

不妨假设 $Z_0=0$，否则，作一平移即可. 因为 $J_W(0)$ 非异，故存在 $Z\neq 0$，$Z\in\mathbf{C}^n$，$\varepsilon>0$，当 $t\in\mathbf{C}$，$|t|<\varepsilon\|Z\|^{-1}$ 时，就有 $J_W(tZ)$ 非异，这里 $\|Z\|$ 表示 Z 的长度.

由 $Z_0=0$，故 $\{W;Z\}_{Z-Z_0,B}=0$ 就是 $\{W;Z\}_B=0$. 由 $\{W;Z\}_{\lambda,B}$ 的定义，易证 $\{W;Z\}_B=0$ 等价于 $\{W;tZ\}_{Z,B}=0$，对于任意的 $Z\neq 0$，$Z\in\mathbf{C}^n$，且 $tZ\in\Omega$，$J_W(tZ)$ 非异的点都成立. 由(2.4.8)式，即得：

$$P^{(3)}(tZ,Z)J_W(tZ)^{-1}-\frac{3}{2}(P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ)^{-1})^2=0. \tag{2.4.10}$$

因为 $J_W(0)$ 非异，由 $P^{(k)}(Z,\lambda)$ 的定义，即得到当 $0<|t|<\varepsilon\|Z\|^{-1}$ 时，(2.4.10)成立. 显然(2.4.10)的左端当 $|t|<\varepsilon\|Z\|^{-1}$ 时，是 t 的

全纯映照. 令 $t\to 0$, (2.4.10)成为 $\{W;0\}_{Z,B}=0$ 对任意 $Z\in\mathbf{C}^n$ 都成立. 由(2.4.10)即得到:

$$P^{(3)}(tZ,Z)=3!\left(\frac{1}{2}P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1}\right)^2 J_W(tZ). \tag{2.4.11}$$

上式两端当 $|t|\leqslant\varepsilon\|Z\|^{-1}$ 时, 关于 t 全纯. 由于

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P^{(k)}(tZ,Z)=P^{(k+1)}(tZ,Z)\quad (k=1,2,\cdots);\\ P^{(1)}(tZ,Z)=J_W(tZ).\end{cases}$$

将(2.4.11)两端对 t 求导, 用数学归纳法可以证明:

$$P^{(k)}(tZ,Z)=k!\left(\frac{1}{2}P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1}\right)^{k-1}J_W(tZ) \tag{2.4.12}$$

对 $k=1,2,3,\cdots$ 都成立.

当 $k=1,2,3$ 时, (2.4.12)显然成立. 若(2.4.12)对 $k=l$ 时成立, 则由(2.4.12), 有

$$\begin{aligned}P^{(l+1)}(tZ,Z)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P^{(l)}(tZ,Z)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[l!\left(\frac{1}{2}P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1}\right)^{l-1}J_W(tZ)\right]\\
&=l!\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}\Big\{(l-1)(P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1})^{l-2}\\
&\quad\times[P^{(3)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1}-P^{(2)}(tZ,Z)\\
&\quad\times(J_W(tZ))^{-1}P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1}]J_W(tZ)\\
&\quad+(P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1})^{l-1}P^{(2)}(tZ,Z)\Big\}\\
&=l!\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}(P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1})^{l-2}\left(\frac{l+1}{2}\right)\\
&\quad\times P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1}P^{(2)}(tZ,Z)\end{aligned}$$

$$= (l+1)!\left(\frac{1}{2}\right)^{l}(P^{(2)}(tZ,Z)(J_W(tZ))^{-1})^{l}J_W(tZ).$$

即(2.4.12)在 $k=l+1$ 时也成立. 这就证明了(2.4.12)对 $k=1,2,3,\cdots$ 都成立. 在(2.4.12)中,令 $t=0$,则有

$$P^{(k)}(0,Z) = k!\left(\frac{1}{2}P^{(2)}(0,Z)(J_W(0))^{-1}\right)^{k-1}J_W(0). \tag{2.4.13}$$

对 $k=1,2,3,\cdots$ 都成立.

在(2.4.1)中取 $Z=0,\lambda=Z$,于是有 $\varepsilon>0$,使得当 $|t|<\varepsilon$ 时,有

$$W(tZ) = W(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}D_Z^kW(0)$$

成立. 由(2.4.2),当 $|t|<\varepsilon$ 时,

$$W(tZ) = W(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}P^{(k)}(0,Z)Z$$

成立. 将(2.4.13)代入上式,就有:当 $|t|<\varepsilon$ 时,

$$W(tZ) = W(0) + \left(I - \frac{t}{2}P^{(2)}(0,Z)(J_W(0)^{-1}\right)^{-1}J_W(0)Z$$

成立.

当 $tZ\in\Omega$ 时,上式两端显然都是 t 的全纯映照,由单复变数的全纯映照的唯一性定理,上式对所有 $tZ\in\Omega$ 的 t 都成立. 取 $t=1$,就有

$$W(Z) = W(0) + \left(I - \frac{1}{2}P^{(2)}(0,Z)(J_W(0))^{-1}\right)^{-1}J_W(0)Z$$

在 $Z=0$的一个邻域中成立. 由于多复变数全纯映照的唯一性定理,上式对所有的 $Z\in\Omega$ 都成立. 这就证明了定理2.4.2的必要性.

由于 $W(Z)$在 Ω 中全纯,故 $I_n-\frac{1}{2}P^{(2)}(0,Z)(J_W(0))^{-1}$ 在 Ω 中非异.

再来证明由(2.4.9)所定义的 $W(Z)$在 Ω 中双全纯.

如若不然,则在 Ω 中有两点 $Z_1\neq Z_2$, 使得 $W(Z_1)=W(Z_2)$. 由于 Ω 为凸域. 故当 $t\in[0,1]$ 时, $(1-t)Z_1+tZ_2\in\Omega$.

令

$$
\begin{aligned}
Q(t)=&\left(I-\frac{1}{2}P^{(2)}(0,(1-t)Z_1+tZ_2)(J_W(0))^{-1}\right)^{-1}J_W(0)\\
&\times((1-t)Z_1+tZ_2)-\left(I-\frac{1}{2}P^{(2)}(0,Z_1)(J_W(0))^{-1}\right)^{-1}\\
&\times J_W(0)Z_1\\
=&\left\{I-\left[\frac{1}{2}P^{(2)}(0,Z_1)+\frac{t}{2}(P^{(2)}(0,Z_2)\right.\right.\\
&\left.\left.-P^{(2)}(0,Z_1))\right](J_W(0))^{-1}\right\}^{-1}J_W(0)(Z_1+t(Z_2-Z_1))\\
&-\left(I-\frac{1}{2}P^{(2)}(0,Z_1)(J_W(0))^{-1}\right)^{-1}J_W(0)Z_1,
\end{aligned}
$$

则

$$Q(0)=Q(1)=0.$$

于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=&\{\cdot\}^{-1}\frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2)-P^{(2)}(0,Z_1))(J_W(0))^{-1}\{\cdot\}^{-1}J_W(0)\\
&\times(Z_1+t(Z_2-Z_1))+\{\cdot\}^{-1}J_W(0)(Z_2-Z_1)\\
=&\{\cdot\}^{-1}\left[\frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2)-P^{(2)}(0,Z_1))(J_W(0))^{-1}\{\cdot\}^{-1}J_W(0)\right.\\
&\left.\times(Z_1+t(Z_2-Z_1))+J_W(0)(Z_2-Z_1)\right],
\end{aligned}
$$

这里 $\{\cdot\}^{-1}=\left\{I-\left[\frac{1}{2}P^{(2)}(0,Z_1)+\frac{t}{2}(P^{(2)}(0,Z_2)-P^{(2)}(0,Z_1))\right]\right.$

$$\left.\times(J_W(0))^{-1}\right\}^{-1},$$

而

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}=2\{\cdot\}^{-1}\frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2)-P^{(2)}(0,Z_1))(J_W(0))^{-1}\{\cdot\}^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2) - P^{(2)}(0,Z_1)) \\
&\times (J_W(0))^{-1}\{\cdot\}^{-1}J_W(0)(Z_1 + t(Z_2 - Z_1)) \\
&+ 2\{\cdot\}^{-1}\frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2) - P^{(2)}(0,Z_1)) \\
&\times (J_W(0))^{-1}\{\cdot\}^{-1}J_W(0)(Z_2 - Z_1) \\
= {} & 2\{\cdot\}^{-1}\frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2) - P^{(2)}(0,Z_1))(J_W(0))^{-1}\{\cdot\}^{-1} \\
&\times \Big[\frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2) - P^{(2)}(0,Z_1))(J_W(0))^{-1}\{\cdot\}^{-1}J_W(0) \\
&\times (Z_1(t(Z_2 - Z_1)) + J_W(0)(Z_2 - Z_1)\Big] \\
= {} & 2\{\cdot\}^{-1}\frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2) - P^{(2)}(0,Z_1))(J_W(0))^{-1}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}
\tag{2.4.14}
$$

令　$A(t)=2\{\cdot\}^{-1}\frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2)-P^{(2)}(0,Z_1))(J_W(0))^{-1}$,则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = {} & 2\{\cdot\}^{-1}\frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2) - P^{(2)}(0,Z_1))(J_W(0))^{-1}\{\cdot\}^{-1} \\
&\times \frac{1}{2}(P^{(2)}(0,Z_2) - P^{(2)}(0,Z_1))(J_W(0))^{-1}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}A^2(t) = 0. \tag{2.4.15}
$$

若 $G(t):t\in[0,1]\to\mathbf{C}^{n\times n}$ 为初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2}GA; \\
G(0) = I
\end{cases}
\tag{2.4.16}
$$

的解. 由于

$$
\frac{\mathrm{d}^2(GQ)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}Q + 2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + G\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2},
$$

根据(2.4.15)及(2.4.16)，有

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}GA\right)A-\frac{1}{2}G\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=0.$$

由(2.4.14)及(2.4.16)，有

$$2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+G\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}=2\left(-\frac{1}{2}GA\right)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+G\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}=0.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2(GQ)}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{2.4.17}$$

在 $t\in[0,1]$ 成立.

矩阵 $GQ\overline{Q}'\overline{G}'$ 是半正定 Hermitian 阵，故有

$$\mathrm{tr}(GQ\overline{Q}'\overline{G}')\geqslant 0.$$

由(2.4.17)，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{tr}(GQ\overline{Q}'\overline{G}')=\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(GQ\overline{Q}'\overline{G}')\right)=\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}(GQ)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\overline{(GQ)}'}{\mathrm{d}t}\right)\geqslant 0$$

在 $t\in[0,1]$ 中成立. 于是 $\mathrm{tr}(GQ\overline{Q}'\overline{G}')$ 作为 t 的函数在 $t\in[0,1]$ 中是一个连续凹函数. 但已知，在 $t=0$ 及 $t=1$，$GQ\overline{Q}'\overline{G}'=0$. 因此，$\mathrm{tr}(GQ\overline{Q}'\overline{G}')=0$ 在 $t\in[0,1]$ 上成立. 由于 $GQ\overline{Q}'\overline{G}'$ 在 $t\in[0,1]$ 时是半正定 Hermitian 阵，于是 $GQ=0$ 在 $t\in[0,1]$ 上成立. 由于 $G(0)=I$，故在 $t=0$ 的附近有个邻域 N，使得 $G(t)$ 非异，当 $t\in N$. 因此当 $t\in N$ 时，$Q(t)=0$，这是不可能的. 导致矛盾.

这就证明了：当 $I_n-\frac{1}{2}P^{(2)}(0,Z)(J_f(0))^{-1}$ 在 Ω 上非异，则由(2.4.9)所定义的 $W(Z)$ 在 Ω 上为双全纯.

定理2.4.1的充分性部分可以这样证明：将上面的推导反方向进行，即从(2.4.9)出发，反方向推导，就可以证明：对任意 $\lambda\neq 0$，$\lambda\in\mathbf{C}^n$，$\{W,Z\}_{\lambda,B}=0$.

在(2.4.9)中令 $Z_0=0$，$Z=t\lambda$，则有

$$W(t\lambda)=W(0)+t\left(I_n-\frac{t}{2}P^{(2)}(0,\lambda)(J_W(0))^{-1}\right)^{-1}J_W(0)\lambda.$$

令 $F(Z+\xi)=W(\xi)$，则上式就是

$$F(Z+t\lambda)=F(Z)+t\left(I_n-\frac{t}{2}P_F^{(2)}(Z,\lambda)(J_F(Z))^{-1}\right)^{-1}J_F(Z)\lambda.$$

式中 $P_F^{(2)}(Z,\lambda)$ 表示 $P^{(2)}$ 中的映照为 F. 由于

$$F(Z+t\lambda)=F(Z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}P_F^{(k)}(Z,\lambda)\lambda$$

当 $|t|$ 充分小时成立. 比较 t^k 的系数则得:

$$P_F^{(k)}(Z,\lambda)=k!2^{1-k}(P_F^{(2)}(Z,\lambda)(J_F(Z))^{-1})^{k-1}J_F(Z)$$
$$(k=1,2,\cdots).$$

由此立即得到 $\{F;Z\}_{\lambda,B}=0$, 这等价于 $\{W;Z\}_{\lambda,B}=0$.

由此可得:

系2.4.1 假设如定理2.4.2, 则 $\{W;Z\}_{Z-Z_0,B}=0$ 在 $\Omega\backslash\{Z_0\}$ 上成立, 以及 $\{W;Z\}_{\lambda,B}=0$ 对所有的 $Z\in\Omega$, $\lambda\neq0$, $\lambda\in\Omega$ 恒成立, 这两者是相互等价的.

显然, 公式(2.4.8)还可以写成:

$$\{W;Z\}_{\lambda,B}=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\frac{\partial^2 J_W(Z)}{\partial z_i\partial z_j}J_W^{-1}(Z)$$
$$-\frac{3}{2}\left(\sum_i\lambda_i\frac{\partial J_W(Z)}{\partial z_i}J_W^{-1}(Z)\right)^2.$$

如果在定理2.4.2中增加条件, 还可以得到进一步的结果.

系2.4.2 假设如定理 2.4.2, $Z_0=(Z_1^0,\cdots,Z_n^0)'$, $Z=(Z_1,\cdots,Z_n)'$, 且存在 $Z-Z_0$ 的函数 $a(Z-Z_0)$, 使得

$$\sum_i(Z_i-Z_i^0)\frac{\partial J_W(Z_0)}{\partial z_i}(Z-Z_0)=a(Z-Z_0)J_W(Z_0)(Z-Z_0)$$

成立, 则

$$W(Z)=W(Z_0)+\frac{J_W(Z_0)(Z-Z_0)}{1-b(Z-Z_0)},$$

这里 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{C}^n$ 为常数行向量, W 为列向量.

证 由假设条件, 则有 $P^{(2)}(Z_0,Z-Z_0)=a(Z-Z_0)J_W(Z_0)$. 由于 $P^{(2)}(Z_0,Z-Z_0)$ 的每个元素都是 $Z-Z_0$ 的元素的一次齐次多项式, 故 $a(Z-Z_0)$ 是 $Z-Z_0$ 的元素的一次齐次多项式, 即

$$a(Z-Z_0)=b(Z-Z_0),\quad b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbf{C}^n,$$

代入(2.4.9),即得所要证明的结果.

现在再回到§ 2.3中 Schwarz 导数的定义,此时

$$Z \in \mathbf{C}^{m\times n},\ G = GL(m,\mathbf{C}) \otimes I_n.$$

在§ 2.3中证明了:$\{W;Z\}_\lambda$ 是在复 Grassman 流形 $CG(m,n)$ 的全纯自同构群作用下的相似不变量(定理2.3.2).还证明了:若 Ω 为 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中的域,$W=W(Z)$: $\Omega\to\mathbf{C}^{m\times n}$ 为全纯映照,有 $Z_0\in\Omega$, $J_W(Z_0)$ 非异,则 $\{W;Z\}_{Z=Z_0}=0$ 在 Z_0 的一个邻域中成立,当且仅当 W 为 Z 的有理分式变换(定理2.3.3).取 $m=1$,则 $Z\in\mathbf{C}^n$, $G=GL(1,\mathbf{C})\otimes I_n$.按定义2.3.2,若 $W=W(Z)$: $\Omega\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 为全纯映照,$\lambda\in\mathbf{C}^n$,如果极限(2.3.2)存在,这就称之为 W 在 Z 点沿方向 λ 的 Schwarz 导数$\{W;Z\}_\lambda$.根据(2.3.12),由于它存在,所以可以写成:

$$\{W;Z\}_\lambda^0 = D_\lambda^3W(Z)(D_\lambda W(Z))^{-1} - \frac{3}{2}(D_\lambda^2W(Z)(D_\lambda W(Z))^{-1})^2. \tag{2.4.18}$$

这里矩阵逆为广义逆,W、Z、λ 均为行向量.为区别由(2.4.8)所定义的 Schwarz 导数,这里用记号 $\{W;Z\}_\lambda^0$ 记之.

由于 $D_\lambda W(Z)=\lambda J_W(Z)'$,故(2.4.18)还可以写成

$$\{W;Z\}_\lambda^0 = (\lambda\lambda')^{-1}D_\lambda^3W(Z)(J_W(Z)')^{-1}\lambda' - \frac{3}{2}(D_\lambda^2W(0)(J_W(Z)')^{-1}\lambda')^2(\lambda\lambda')^{-2}.$$

于是

$$(\lambda\lambda')^2\{W;Z\}_\lambda^0 = D_\lambda^3W(Z)(J_W(Z)')^{-1}\lambda'(\lambda\lambda') - \frac{3}{2}(D_\lambda^2W(Z)(J_W(Z)')^{-1}\lambda')^2.$$

由于

$$D_\lambda^2W(Z) = D_\lambda(\lambda J_W(Z)') = \sum \lambda\lambda_i \frac{\partial J_W(Z)'}{\partial z_i},$$

$$D_\lambda^3W(Z) = \sum \lambda\lambda_i\lambda_j \frac{\partial^2 J_W(Z)'}{\partial z_i\partial z_j},$$

所以

$$
\begin{aligned}
(\lambda\lambda')^2\{W;Z\}_\lambda^0 = & \sum_{ij}\lambda\lambda_i\lambda_j \frac{\partial^2 J_W(Z)'}{\partial z_i \partial z_j}(J_W(Z)')^{-1}\lambda'(\lambda\lambda') \\
& - \frac{3}{2}\left(\sum_i \lambda\lambda_i \frac{\partial J_W(Z)'}{\partial z_i}(J_W(Z)')^{-1}\lambda'\right)^2 \\
= & (\lambda\lambda')\lambda(J_W(Z))^{-1}\left(\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j \frac{\partial^2 J_W(Z)}{\partial z_i \partial z_j}\right)\lambda' \\
& - \frac{3}{2}\left(\lambda(J_W(Z))^{-1}\left(\sum_i \lambda_i \frac{\partial J_W(Z)}{\partial z_i}\right)\lambda'\right)^2 \\
= & \lambda(J_W(Z))^{-1}\left[(\lambda\lambda')\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j \frac{\partial^2 J_W(Z)}{\partial z_i \partial z_j}\right. \\
& \left. - \frac{3}{2}\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j \frac{\partial J_W(Z)}{\partial z_i}\lambda'\lambda(J_W(Z))^{-1}\frac{\partial J_W(Z)}{\partial z_j}\right]\lambda'.
\end{aligned}
\tag{2.4.19}
$$

当 $m=1$时，定理2.3.2成为$\{W;Z\}_\lambda$ 在 $\mathbf{CP}^n$ 的全纯自同构群作用下的相似不变量，而定理2.3.3成为：若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为域，$W=W(Z)$：$\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为全纯映照，$Z_0\in\Omega$，$J_W(Z_0)$非异. 如果$\{W,Z\}$在 $Z=Z_0$ 的附近存在，则 $\{W;Z\}_{Z-Z_0}\equiv 0$ 在 Ω 上成立的充要条件为

$$
W(Z) = W(Z_0) + \frac{(Z-Z_0)J_W(Z_0)'}{1-b(Z-Z_0)'}, \tag{2.4.20}
$$

这里 $b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbf{C}^n$ 为常数向量，$J_W(Z_0)$为 W 的 Jacobian 在 $Z=Z_0$点的值的转置.

现在来证明如下的结果：

定理2.4.3　若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为域，$W=W(Z)$：$\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为全纯映照，如有 $Z_0\in\Omega$，$J_W(Z_0)$非异，且在 Z_0的一个邻域中，$\{W;Z\}_\lambda$ 都存在，则 $W(Z)$为(2.4.20)的形式，这里 $\lambda\neq 0$，$\lambda\in\mathbf{C}^n$. 因此，$\{W;Z\}_\lambda=0$ 对任意 $Z\in\Omega$，$\lambda\neq 0$，$\lambda\in\mathbf{C}^n$ 都成立.

以下证明定理2.4.3.

不妨设 $Z_0=0$，$W(0)=0$，$J_W(0)=I$. 否则，可以通过平移及映照正规化即可. 取 $r>0$充分小，使得 $B_r=\{Z\in\mathbf{C}^n: Z\overline{Z}'<r^2\}\subset\Omega$，包在定理2.4.3中的 $Z=0$的邻域中. 由(2.3.21)，当 $Z\in B_r$ 时，存

在函数 $a(tZ,Z)$，使得

$$\sum_{i,j} z_i z_j \frac{\partial^2 W_\alpha(tZ)}{\partial z_i \partial z_j} = a(tZ,Z) \sum_i z_i \frac{\partial W_\alpha(tZ)}{\partial z_i} \quad (\alpha = 1,\cdots,n)$$

成立. 这里 $W=(W_1,\cdots,W_n)$. 上式就是

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} W_\alpha(t,Z) = a(tZ,Z) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\alpha(tZ).$$

因此对任意 α, $\beta=1,\cdots,n$ 有

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} W_\alpha(tZ)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\alpha(tZ)} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} W_\beta(tZ)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\beta(tZ)} = a(tZ,Z).$$

对上式左端对 t 从 0 到 t 积分，得

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\alpha(tZ)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\alpha(0)} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\beta(tZ)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\beta(0)}.$$

而 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\alpha(0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\alpha(tZ)\big|_{t=0} = \sum Z_i \dfrac{\partial W_\alpha(0)}{\partial z_i}$，由于 $J_W(0)=I$，

故 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\alpha(0) = z_\alpha$. 所以

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\alpha(tZ)}{z_\alpha} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_\beta(tZ)}{z_\beta}.$$

在上式两端对 t 从 0 到 t 积分，由于 $W(0)=0$，就得

$$\frac{W_\alpha(tZ)}{z_\alpha} = \frac{W_\beta(tZ)}{z_\beta}.$$

取 $t=1$，就有 $\dfrac{W_\alpha(Z)}{z_\alpha} = \dfrac{W_\beta(Z)}{z_\beta}$. 记 $\dfrac{W_\alpha(Z)}{z_\alpha} = \widetilde{W}$ $(\alpha=1,2,\cdots,n)$，则

$$W_\alpha(Z) = z_\alpha \widetilde{W} \quad (\alpha = 1,2,\cdots,n). \tag{2.4.21}$$

在上式两端对 z_i 求导：

$$\frac{\partial W_\alpha(Z)}{\partial z_i} = \delta_i^\alpha \widetilde{W} + \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial z_i} z_\alpha,$$

由于 $J_W(0)=I$，故 $\dfrac{\partial W_\alpha}{\partial z_i}(0) = \delta_i^\alpha$，由上式得到

$$\delta_i^{\alpha} = \delta_i^{\alpha} \widetilde{W}(0),$$

即 $\widetilde{W}(0)=1$.

由于定理假设,对任意 $0 \neq \lambda \in \mathbf{C}^n$,在点 $Z=0$ 附近 $\{W;Z\}_\lambda$ 存在,由(2.3.17)就有 $a(Z,\lambda)$, 使得

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 W_\alpha(Z)}{\partial z_i \partial z_j} = a(Z,\lambda) \sum_i \lambda_i \frac{\partial W_\alpha(Z)}{\partial z_i} \quad (\alpha = 1, \cdots, n)$$

成立,这里 $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 上式就是:

$$2\lambda_\alpha \sum_i \lambda_i \frac{\partial \widetilde{W}(Z)}{\partial z_i} + z_\alpha \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 \widetilde{W}(Z)}{\partial z_i \partial z_j}$$
$$= a(Z,\lambda)\left(\lambda_n \widetilde{W} + z_\alpha \sum_i \lambda_i \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial z_i}\right).$$

于是

$$a(Z,\lambda) = \left(2\lambda_n \sum_i \lambda_i \frac{\partial \widetilde{W}(Z)}{\partial z_i} + z_\alpha \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 \widetilde{W}(Z)}{\partial z_i \partial z_j}\right)$$
$$\times \left(\lambda_\alpha \widetilde{W} + z_\alpha \sum_i \lambda_i \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial z_i}\right)^{-1}.$$

将上式右端记为 P_α,则 $P_\alpha = P_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n)$. 由此可得:

$$(z_\alpha \lambda_\beta - z_\beta \lambda_n)\left(\widetilde{W}(Z) \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 \widetilde{W}(Z)}{\partial z_i \partial z_j} - 2\left(\sum_i \lambda_i \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial z_i}\right)^2\right) = 0.$$

如果 z 与 λ 是两个不同的方向,则有

$$\widetilde{W}(Z) \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 \widetilde{W}(Z)}{\partial z_i \partial z_j} = 2\left(\sum_i \lambda_i \frac{\partial \widetilde{W}(Z)}{\partial z_i}\right)^2. \quad (2.4.22)$$

由于上式对任意一个固定的方向 Z 及与 Z 不同方向的 λ 都成立,而上式两端都是 $\lambda_i (i=1, \cdots, n)$ 的连续函数,故可以取向量序列 $\lambda^{(j)}$,每个 $\lambda^{(j)}$ 与 Z 有不同的方向,而 $\lim\limits_{j \to \infty} \lambda^{(j)} = Z$. 这是完全可能的,于是由(2.4.22)得到:

$$\widetilde{W}(Z) \sum_{i,j} z_i z_j \frac{\partial^2 \widetilde{W}(Z)}{\partial z_i \partial z_j} = 2\left(\sum_i z_i \frac{\partial \widetilde{W}(Z)}{\partial z_i}\right)^2$$

成立. 因此即可有

$$\widetilde{W}(tZ)\sum_{i,j}z_iz_j\frac{\partial^2\widetilde{W}(tZ)}{\partial z_i\partial z_j}=2\Big(\sum_i z_i\frac{\partial^2\widetilde{W}(tZ)}{\partial z_i}\Big)^2$$

对 $0<t\leqslant 1$ 都成立，而这也就是：

$$\widetilde{W}(tZ)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\widetilde{W}(tZ)=2\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{W}(tZ)\Big)^2.$$

于是

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\widetilde{W}(tZ)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{W}(tZ)}=2\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{W}(tZ)}{\widetilde{W}(tZ)}.$$

在上式两端对 t 从 0 到 t 积分，由于 $\widetilde{W}(0)=1$，就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{W}(tZ)|_{t=0}=\sum_i z_i\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial z_i}(0)=Zb',$$

这里 $b=(b_1,\cdots,b_n)\in C^n$ 为常数向量，因此有

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{W}(tZ)}{Zb'}=(\widetilde{W}(tZ))^2.$$

即
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{W}(tZ)/(\widetilde{W}(tZ))^2=Zb'.$$

在上式两端对 t 从 0 到 t 积分，就有

$$1-\frac{1}{\widetilde{W}(tZ)}=tZb'.$$

令 $t=1$，即有 $\widetilde{W}(Z)=\dfrac{1}{1-Zb'}$，由(2.4.21)得到

$$W_\alpha(Z)=\frac{Z_\alpha}{1-Zb'}\quad(\alpha=1,2,\cdots,n)\quad 当\ Z\in B_r\ 时成立.$$

由于 $W_\alpha(Z)$ 为 Z 的全纯函数，故上式对任意的 $z\in\Omega$ 都成立. 这就证明了：若 $\{W;Z\}_\lambda$ 在点 $Z=0$ 附近对任意的 $\lambda\in C^n$ 都存在，则 $W(Z)$ 必为(2.4.20)的形式.

现在来验证：当 $W(Z)$ 有(2.4.20)形式时，则对任意的 $0\neq\lambda\in C^n$，$\{W;Z\}_\lambda=0$ 成立. 按定义 2.3.2，当 $W(Z)$ 有(2.4.20)形式时，$\{W;Z\}_\lambda$ 显然存在. 因此要验证 $\{W;Z\}_\lambda=0$，只要验证

$\{W;Z\}_\lambda^0=0$ 即可. (2.4.20)可写为

$$W(Z)=\left(W_1(0)+\frac{1}{1-Zb'}\sum_i z_i\frac{\partial W_1}{\partial z_i}(0),\cdots,W_n(0)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-Zb'}\sum_i z_i\frac{\partial W_n}{\partial z_i}(0)\right).$$

容易验证:下列等式是成立的:

$$J_W(Z)=J_W(0)\left(\frac{I_n}{1-Zb'}+\frac{Z'b}{(1-Zb')^2}\right),$$

$$\frac{\partial J_W(Z)}{\partial z_i}=J_W(0)\left[\frac{b_iI_n}{(1-Zb')^2}+\frac{2b_iZ'b}{(1-Zb')^3}+\frac{e_i'b}{(1-Zb')^2}\right]$$

以及

$$\frac{\partial^2W(Z)}{\partial z_i\partial z_j}=J_W(0)\left[\frac{2b_ib_jI_n}{(1-Zb')^3}+\frac{2b_ie_j'b}{(1-Zb')^3}+\frac{6b_ib_jZ'b}{(1-Zb')^4}\right.$$

$$\left.+\frac{2b_je_i'b}{(1-Zb')^3}\right].$$

上式中 e_i、e_j 分别为 i 坐标、j 坐标的单位向量. 因此

$$J_W(Z)^{-1}=(1-zb')(I-Zb')(J(0))^{-1},$$

$$\lambda(J_W(Z))^{-1}\left(\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\frac{\partial^2J_W(Z)}{\partial z_i\partial z_j}\right)=\frac{6(\lambda b')^2}{(1-Zb')^2}\lambda, \quad (2.4.23)$$

$$\lambda(J_W(Z))^{-1}\left(\sum_i\lambda_i\frac{\partial J_W(Z)}{\partial z_i}\right)=\frac{2\lambda b'}{1-Zb'}\lambda. \quad (2.4.24)$$

将(2.4.23)及(2.4.24)代入(2.4.19)就有 $\{W,Z\}_\lambda^0=0$. 于是 $\{W;Z\}_\lambda=0$ 成立. 这就证明了定理2.4.3.

如果在(2.4.19)式的右端的式子中,以 μ' 代替 λ',这里 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)\in\mathbf{C}^n$,并记之为 $\{W;Z\}_{\lambda,\mu}$, 即

$$\{W;Z\}_{\lambda,\mu}=(\lambda\mu')\lambda(J_W(Z))^{-1}\left(\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\frac{\partial^2J_W(Z)}{\partial z_i\partial z_j}\right)\mu'$$

$$-\frac{3}{2}\left[\lambda(J_W(Z))^{-1}\left(\sum_i^n\lambda_i\frac{\partial J_W(Z)}{\partial z_i}\right)\mu'\right]^2. \quad (2.4.25)$$

(2.4.25)即为文献[2.11]中所定义的 W 在 Z 点沿方向 λ 和 μ 的

Schwarz 导数.

若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为域，$0\in\Omega$，$W=W(Z):\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为局部双全纯映照，如果记(2.4.20)形式的 W 为 F(取 $Z_0=0$)，则在文献[2.11]中证明了：若 $F\circ W$ 和 $W\circ F$ 在 Ω 上有意义，则

$$\{W\circ F;Z\}_{\lambda,\lambda J_W(Z)}=\{W;Z\}_{\lambda,\lambda J_W(Z)}$$

及

$$\{W\circ F;Z\}_{\lambda,\mu}=\{W;Z\}_{\overline{\lambda J_W(Z)'},\mu J_W^{-1}(Z)}$$

对任意非零的 λ、$\mu\in\mathbf{C}^n$ 都成立.

证明从略.

最后对上述两种不同的 Schwarz 导数进行一个简单的比较：若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为域，$W=W(Z):\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为全纯映照，如前所述，从两个不同的李群出发，可得两种不同的 Schwarz 导数. 从 $G=GL(1,\mathbf{C})\otimes I_n$ 出发，得到 W 在 Z 点的 Schwarz 导数 $\{W;Z\}$，这是一个数量函数；从 $G=GL(n,\mathbf{C})$ 出发，得到 W 在 Z 点的大 Schwarz 导数 $\{W;Z\}_B$ 这是一个 $n\times n$ 方阵函数. 这样定义的 Schwarz 导数及大 Schwarz 导数是我们讨论的主要对象. 在 § 2.3及本节中证明了：Schwarz 导数及大 Schwarz 导数都是在 $\mathbf{CP}^n$ 的全纯自同构群作用下的相似不变量. 还证明了：若$0\in\Omega$ 以及在点0的 Jacobian$J_f(0)$ 非异，在点0的一个邻域 N 中$\{W;Z\}$存在，且$\{W;Z\}=0$(一个方程)在 N 中成立，则 $W(Z)$必为有理分式(2.4.20)的形式(取 $Z_0=0$). 若 Ω 为凸域，则这是个在 Ω 中的双全纯映照，反之亦真. 若在 N 中，$\{W;Z\}_B=0$(n^2个方程)成立，则 $W(Z)$必为有理分式(2.4.9)的形式(取 $Z_0=0$). 若 Ω 为凸域，则这是个在 Ω 中的双全纯映照. 反之亦真. 因此$\{W;Z\}$及$\{W;Z\}_B$ 都刻画了 $\mathbf{CP}^n$.

此外，若 $\lambda\neq0$，$\lambda\in\mathbf{C}^n$，我们还分别定义了 Schwarz 导数在 Z 点沿方向 λ 的 Schwarz 方向导数$\{W;Z\}_\lambda$ 及$\{W;Z\}_{\lambda,B}$. 定理2.4.3告诉我们：如果 $W(Z)$不是(2.4.16)的形式，则至少有一个方向$\lambda\neq0$，$\lambda\in\mathbf{C}^n$，$\{W;Z\}$是不存在的. 但是$\{W;Z\}_{\lambda,B}$对任意 $\lambda\neq0$，$\lambda\in\mathbf{C}^n$ 的方向 λ 都是存在的. 这是两种 Schwarz 方向导数根本不同之处.

§2.5 矩阵空间上全纯映照的高阶 Schwarz 导数

在前三节中，按照 Ahlfors 的观点，定义并讨论了典型域、矩阵空间及 $\mathbf{C}^n$ 上全纯映照的 Schwarz 导数. 在这一节中将按照 Thurston 的观点来定义与讨论 Schwarz 导数.

在本节中将讨论矩阵空间 $\mathbf{C}^{m\times n}(m\leqslant n)$，证明：当 $m\leqslant n$ 时，由 Thurston 观点得到的 Schwarz 导数是与在§2.2及§2.3中由 Ahlfors 观点得到的 Schwarz 导数是相一致的，因此在§2.3中定义 $\{W;Z\}_2$ 为 W 在 Z 点的 Schwarz 导数是最为合理的. 此外，从 Thurston 的观点，还可以定义高阶 Schwarz 导数，而且可以证明：这些高阶 Schwarz 导数如同 Schwarz 导数那样，在 R_1的紧对偶空间的全纯自同构群作用下是相似不变量. 要注意的是，当 $m<n$ 时，由 Thurston 观点出发，未必能定义 Schwarz 导数，但若能定义 Schwarz 导数的话，那么 Schwarz 导数与高阶 Schwarz 导数也都具有相似不变性. 这时要求能定义 Schwarz 导数的条件，相当于§2.3中要求四点交比存在的条件. 而要有这样的条件应该说是理所当然的. 应用上述这些结果以及 Waring-Hilhert 问题的解，则可以定义在 $\mathbf{C}^n$ 上全纯映照的 Schwarz 导数及高阶 Schwarz 导数，并可证明：它们也具有相似不变性. 此外，应用§2.3中的方法，还可以证明：这样定义的 Schwarz 导数等于零，当且仅当映照是某种意义下的线性分式变换.

以上这些取材于龚昇、郑学安、余其煌的工作(见文献[2.17]).

如同在§2.1中所指出的，Thurston 的观点是：Schwarz 导数是用来衡量映照与 Möbius 变换之间的偏离的. 若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为域，映照 $f(Z):\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为 Ω 上全纯映照(不妨设为局部双全纯). 对于点 $Z_0\in\Omega$，若在 $\mathbf{C}^n$ 的 Möbius 变换群中能找到一个元素 W_0，使得 f 在 Z_0点与 W_{Z_0}在一指定点的值与一阶、二阶方向导数的值全相等，则称 W_{Z_0}为 f 的二阶逼近，而 $W_{Z_0}^{-1}\circ f$ 即为 Möbius 变换与 f 的偏

离，其主项就是 Schwarz 导数.

先来考虑 $\mathbf{C}^{m\times n}$，$m<n$ 的情形，即讨论 $\mathbf{C}^{m\times n}$中的域 Ω. $f(Z):\Omega\to\mathbf{C}^{m\times n}$为 Ω 上局部双全纯映照，若 $Z_0\in\Omega$，且秩为 m，寻找 $f(Z)$在 Z_0 点的二阶逼近，即寻找 Möbius 变换：

$$W_{Z_0}(Z)=A(Z_0)+B(Z_0)Z(I-C(Z_0)Z)^{-1},\quad (2.5.1)$$

这里 $A(Z_0)\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$B(Z_0)\in\mathbf{C}^{m\times m}$，$C(Z_0)\in\mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$f(Z_0)=W_{Z_0}(0);\ D_{Z_0}f(Z_0)=D_{Z_0}W_{Z_0}(0);$$

$$D^2_{Z_0}f(Z_0)=D^2_{Z_0}W_{Z_0}(0)\qquad (2.5.2)$$

成立. 条件(2.5.2)导出了：

$$A(Z_0)=f(Z_0);\ B(Z_0)Z_0=D_{Z_0}f(Z_0);$$

$$2B(Z_0)Z_0C(Z_0)Z_0=D^2_{Z_0}f(Z_0).$$

由于 Z_0的秩为 m，f 在 Ω 上局部双全纯，故 $D_{Z_0}f(Z_0)$的秩为 m. 将 $B(Z_0)$的元素看作独立变量，于是有 m^2个独立变量，而 $B(Z_0)Z_0=D_{Z_0}f(Z_0)$有 mn 个方程. 由于 $m<n$，故方程的个数大于独立变量的个数，一般来说，这样的方程是无解的，也就是说，一般地，不存在 (2.5.1)这样的 Möbius 变换使之满足(2.5.2). 因此不能用(2.5.1)来对 $f(Z)$ 进行二阶逼近.

再来考虑另一种 Möbius 变换：

$$W_{Z_0}(Z)=A(Z_0)+(I-ZC(Z_0))^{-1}ZB(Z_0),\quad (2.5.3)$$

这里 $A(Z_0)\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$B(Z_0)\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$C(Z_0)\in\mathbf{C}^{n\times m}$，使得(2.5.2)成立，这时(2.5.2)导出了：

$$A(Z_0)=f(Z_0);\ Z_0B(Z_0)=D_{Z_0}f(Z_0);$$

$$2Z_0C(Z_0)Z_0B(Z_0)=D^2_{Z_0}f(Z_0).\qquad (2.5.4)$$

将 $B(Z_0)$的元素看作独立变量，于是有 n^2个独立变量，而 $Z_0B(Z_0)=D_{Z_0}f(Z_0)$有 mn 个方程. 由于 $m<n$，故方程的个数小于独立变量的个数. $D_{Z_0}f(Z_0)$的秩为 m. 因此存在无穷多个秩为 n 的$B(Z_0)$满足 $Z_0B(Z_0)=D_{Z_0}f(Z_0)$. 取定了 $B(Z_0)$ 之后，考虑方程

$$2Z_0C(Z_0)Z_0B(Z_0)=D^2_{Z_0}f(Z_0),$$

即
$$2Z_0C(Z_0)D_{Z_0}f(Z_0) = D_{Z_0}^2f(Z_0),$$
将 $C(Z_0)\in \mathbf{C}^{n\times m}$ 的元素看作独立变量，于是有 mn 个独立变量，mn 个方程. 但是方程未必一定有解，如果方程无解，则不能用(2.5.3)来对 $f(Z)$ 进行二阶逼近；如果方程有解，则能用(2.5.3)来对 $f(Z)$ 进行二阶逼近. 这时可用二阶逼近来定义 Schwarz 导数及高阶 Schwarz 导数，并可证明它们在 $R_{\rm I}(m,n)$ 的紧对偶空间 $CG(m,n)$ 的全纯自同构群作用下是相似不变的，而且这时得到的 Schwarz 导数与 § 2.3中得到的 Schwarz 导数是相同的. 也就是说，在 $\mathbf{C}^{m\times n}$，$m<n$ 的情形，用 Thurston 的观点得到的 Schwarz 导数(如果存在的话)与用 Ahlfors 的观点得到的 Schwarz 导数(如果存在的话)是相一致的.

现在假设方程
$$2Z_0C(Z_0)D_{Z_0}f(Z_0) = D_{Z_0}^2f(Z_0)$$
有解的情形下来定义 f 在 Z_0 点的 Schwarz 导数及高阶 Schwarz 导数，并证明其相似不变性.

这时，可以定义：
$$\begin{aligned}W_{Z_0}^{-1}\circ f(Z)B(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1} &= (f(Z)-A)(Cf(Z)-CA+B)^{-1}\\ &\quad\times B(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1}\\ &= (f(Z)-f(Z_0))(B^{-1}C(f(Z)\\ &\quad - f(Z_0))+I)^{-1}(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1},\end{aligned}\tag{2.5.5}$$
这里 $(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1}$ 为 $D_{Z_0}f(Z_0)$ 的广义逆矩阵.

取 $Z=Z_0+tZ_0$，则当 $|t|$ 充分小时，有展开式：
$$W_{Z_0}^{-1}\circ f(Z_0+tZ_0)B(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}S_k[f](Z_0)\frac{t^k}{k!}.\tag{2.5.6}$$
定义 $S_k[f](Z_0)$ 为 f 在 Z_0 点的 k 阶 $(k=0,1,2,\cdots)$ Schwarz 导数，而定义3 阶 Schwarz 导数为 Schwarz 导数，记作 $S[f](Z_0)$.

$R_{\rm I}(m,n)$ 的紧对偶空间 Grassman 流形 $CG(m,n)$ 的全纯自同

构群由

$$T(Z) = (PZ+Q)(RZ+S)^{-1} \text{ 且 } \det\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = 1$$

所组成，这里 $P\in \mathbf{C}^{m\times m}$，$Q\in \mathbf{C}^{m\times n}$，$R\in \mathbf{C}^{n\times m}$，$S\in \mathbf{C}^{n\times n}$.

首先一个问题是：对于$(T\circ f)(Z)$，在 Z_0 点的二阶逼近是否存在？即能否找到

$$\widetilde{W}_{Z_0}(Z) = A_1(Z_0) + (I - ZC_1(Z_0))^{-1}ZB_1(Z_0), \qquad (2.5.7)$$

这里 $A_1(Z_0)\in \mathbf{C}^{m\times n}$，$B_1(Z_0)\in \mathbf{C}^{n\times n}$，$C_1(Z_0)\in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$(T\circ f)(Z_0) = \widetilde{W}_{Z_0}(0),\ D_{Z_0}(T\circ f)(Z_0) = D_{Z_0}\widetilde{W}_{Z_0}(0),$$

$$D_{Z_0}^2(T\circ f)(Z_0) = D_{Z_0}^2\widetilde{W}_{Z_0}(0)$$

成立，即

$$A_1 = (T\circ f)(Z_0),\ Z_0B_1 = D_{Z_0}(T\circ f)(Z_0),$$

$$Z_0C_1Z_0B_1 = \frac{1}{2}D_{Z_0}^2(T\circ f)(Z_0)$$

的解 A_1、B_1、C_1 存在. 显然解 A_1和 B_1是存在的，问题是解 C_1是否存在？下面要证明：

若解 C 存在，则解 C_1也存在. 这时(2.5.7)成为 $(T\circ f)(Z)$ 在 Z_0 点的二阶逼近. 于是，当$|t|$充分小时，有

$$\widetilde{W}_{Z_0}^{-1}\circ (T\circ f)(Z_0+tZ_0)B_1[D_{Z_0}(T\circ f)(Z_0)]^{-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} S_k[T\circ f](Z_0)\frac{t^k}{k!}, \qquad (2.5.8)$$

而 $S_k[T\circ f](Z_0)$为$(T\circ f)(Z)$在点 Z_0处的 k 阶 $(k=0,1,2,\cdots)$ Schwarz导数.

由于

$$(T\circ f)(Z) = (Pf(Z)+Q)(Rf(Z)+S)^{-1},$$

对上式求导，就得

$$D_{Z_0}(T\circ f)(Z) = P(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}$$

$$-(Pf(Z)+Q)(Rf(Z)+S)^{-1}R(D_{Z_0}f(Z))$$
$$\times (Rf(Z)+S)^{-1}. \qquad (2.5.9)$$

要化简(2.5.9)式，就要用到以下的恒等式，这时不妨假设 S 为非异的(如 S 为奇异的，则可用 § 2.3中的方法处理).

$$\begin{aligned}(PZ+Q)(RZ+S)^{-1} &= (PZ+Q)(S^{-1}RZ+I)^{-1}S^{-1}\\ &= [(P-QS^{-1}R)Z+Q(S^{-1}RZ+I)]\\ &\quad\times (S^{-1}RZ+I)^{-1}S^{-1}\\ &= (P-QS^{-1}R)Z(S^{-1}RZ+I)^{-1}S^{-1}\\ &\quad+QS^{-1}\\ &= (P-QS^{-1}R)(ZS^{-1}R+I)^{-1}ZS^{-1}\\ &\quad+QS^{-1}. \qquad (2.5.10)\end{aligned}$$

由 § 2.3知：如果 S 为非异的，则 $P-QS^{-1}R$ 也是非异的.

应用(2.5.10)于(2.5.9)，得到

$$\begin{aligned}D_{Z_0}(T\circ f)(Z) &= P(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}\\ &\quad-(P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}f(Z)S^{-1}\\ &\quad\times R(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}\\ &\quad-QS^{-1}R(D_{Z_0}f(Z)(Rf(Z)+S)^{-1}\\ &= (P-QS^{-1}R)(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}\\ &\quad-(P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}f(Z)S^{-1}\\ &\quad\times R(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}\\ &= (P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}(f(Z)S^{-1}R\\ &\quad+I-f(Z)S^{-1}R)(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)-S)^{-1}\\ &= (P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}(D_{Z_0}f(Z))\\ &\quad\times R(Rf(Z)+S)^{-1}. \qquad (2.5.11)\end{aligned}$$

对(2.5.11)再求导，可得

$$\begin{aligned}D^2_{Z_0}(T\circ f)(Z) &= (P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}(D^2_{Z_0}f(Z))\\ &\quad\times (Rf(Z)+S)^{-1}-(P-QS^{-1}R)\\ &\quad\times (f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}(D_{Z_0}f(Z))S^{-1}\end{aligned}$$

$$\times R(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}$$

$$-(P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}(D_{Z_0}f(Z))$$

$$\times (Rf(Z)+S)^{-1}R(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}$$

$$=(P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}(D_{Z_0}^2f(Z))$$

$$\times (Rf(Z)+S)^{-1}-(P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R$$

$$+I)^{-1}(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}\{(Rf(Z)$$

$$+S)S^{-1}R+R(f(Z)S^{-1}R+I)\}$$

$$\times (f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}$$

$$=(P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}(D_{Z_0}^2f(Z))$$

$$\times (Rf(Z)+S)^{-1}-2(P-QS^{-1}R)(f(Z)S^{-1}R+I)^{-1}$$

$$\times (D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}R(D_{Z_0}f(Z))(Rf(Z)+S)^{-1}, \tag{2.5.12}$$

记

$$H=(P-QS^{-1}R)(f(Z_0)S^{-1}R+I)^{-1}, \tag{2.5.13}$$

则(2.5.11)及(2.5.12)可以写成

$$D_{Z_0}(T\circ f)(Z_0)=H(D_{Z_0}f(Z_0))(Rf(Z_0)+S)^{-1}, \tag{2.5.14}$$

$$D_{Z_0}^2(T\circ f)(Z_0)=H(D_{Z_0}^2f(Z_0))(Rf(Z_0)+S)^{-1}$$

$$-2H(D_{Z_0}f(Z_0))(Rf(Z_0)+S)^{-1}$$

$$\times R(D_{Z_0}f(Z_0))(Rf(Z_0)+S)^{-1}. \tag{2.5.15}$$

由(2.5.4)、(2.5.13)、(2.5.14)及(2.5.15),可得

$$\frac{1}{2}D_{Z_0}^2(T\circ f)(Z_0)=HZ_0CZ_0B(Rf(Z_0)+S)^{-1}$$

$$-HZ_0B(Rf(Z_0)+S)^{-1}RZ_0B(Rf(Z_0)+S)^{-1}$$

$$=(HZ_0CH^{-1}-HZ_0B(Rf(Z_0+S)^{-1}RH^{-1})$$

$$\times (D_{Z_0}(T\circ f)(Z_0)).$$

另一方面,由

$$\frac{1}{2}D_{Z_0}^2(T\circ f)(Z_0)=Z_0C_1Z_0B_1=Z_0C_1(D_{Z_0}(T\circ f)(Z_0))$$

知可取下列方程中的解 C_1：

$$Z_0C_1 = HZ_0(C - B(Rf(Z_0) + S)^{-1}R)H^{-1}, \quad (2.5.16)$$

将 C_1 的元素看作独立变量，于是有 mn 个变量，m^2 个方程，而 Z_0 的秩为 m，故方程有解，且解不唯一. 因此如果 $f(Z)$ 在 Z_0 点有二阶逼近，则 $T \circ f(Z)$ 在 Z_0 点也有二阶逼近(2.5.7).

由(2.5.13)、(2.5.14)及(2.5.16)得

$$Z_0C_1 = Z_0B_1B_1^{-1}C_1 = D_{Z_0}(T \circ f)(Z_0)B_1^{-1}C_1$$

及

$$\begin{aligned} Z_0C_1 &= HZ_0B(Rf(Z_0) + S)^{-1}(Rf(Z_0) + S)B^{-1}CH^{-1} \\ &\quad - HZ_0B(Rf(Z_0) + S)^{-1}RH^{-1} \\ &= D_{Z_0}(T \circ f)(Z_0)[(Rf(Z_0) + S)B^{-1}CH^{-1} - RH^{-1}]. \end{aligned}$$

因此可以选取 C_1，使之适合：

$$B_1^{-1}C_1 = (Rf(Z_0) + S)B^{-1}CH^{-1} - RH^{-1}. \quad (2.5.17)$$

当 B、C 及 B_1 确定后，则 C_1 是唯一确定的，且(2.5.17)的右边只依赖于 T 及 $f(Z_0)$.

现在就可以来计算 $\widetilde{W}_{Z_0}^{-1} \circ T \circ f(Z)$.

由(2.5.7)可得

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{Z_0}^{-1} \circ (T \circ f)(Z) &= ((T \circ f)(Z) - (T \circ f)(Z_0)) \\ &\quad \times (I + B_1^{-1}C_1(T \circ f(Z) - T \circ f(Z_0)))^{-1}B_1^{-1}. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

由 T 的定义，有

$$\begin{aligned} &((T \circ f)(Z) - (T \circ f)(Z_0))(Rf(Z) + S) \\ &= [Pf(Z) + Q - (T \circ f)(Z_0)(Rf(Z) + S)] \\ &= P(f(Z) - f(Z_0)) - (T \circ f)(Z_0)R(f(Z) - f(Z_0)) \\ &= (P - (T \circ f)(Z_0)R)(f(Z) - f(Z_0)). \end{aligned}$$

由于(2.5.10)和(2.5.13)知

$$\begin{aligned} P - (T \circ f)(Z_0)R &= P - (Pf(Z_0) + Q)(Rf(Z_0) + S)^{-1}R \\ &= P - (P - QS^{-1}R)(f(Z_0)S^{-1}R \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ I)^{-1}f(Z_0)]S^{-1}R - QS^{-1}R \\
&= (P - QS^{-1}R)(f(Z_0)S^{-1}R + I)^{-1} \\
&\quad \times (f(Z_0)S^{-1}R + I - f(Z_0)S^{-1}R) \\
&= (P - QS^{-1}R)(I + f(Z_0)S^{-1}R)^{-1} = H.
\end{aligned}
$$

因此

$$
((T\circ f)(Z)-(T\circ f)(Z_0))(Rf(Z)+S)=H(f(Z)-f(Z_0)). \tag{2.5.19}
$$

但是由(2.5.17)和(2.5.19),有

$$
\begin{aligned}
&(Rf(Z) + S)^{-1}(I + B_1^{-1}C_1((T \circ f)(Z) - (T \circ f)(Z_0)))^{-1} \\
&\quad = [Rf(Z) + S + B_1^{-1}C_1((T \circ f)(Z) \\
&\qquad - (T \circ f)(Z_0))(Rf(Z) + S)]^{-1} \\
&\quad = [Rf(Z) + S + B_1^{-1}C_1H(f(Z) - f(Z_0)]^{-1} \\
&\quad = [Rf(Z_0) + S + (R + B_1^{-1}C_1H)(f(Z) - f(Z_0))]^{-1} \\
&\quad = [Rf(Z_0) + S + (Rf(Z_0) + S)B^{-1}C(f(Z) - f(Z_0))]^{-1} \\
&\quad = [I + B^{-1}C(f(Z) - f(Z_0))]^{-1}(Rf(Z_0) + S)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.5.20}
$$

将(2.5.19)和(2.5.20)代入(2.5.18),得到

$$
\begin{aligned}
\widetilde{W}_{Z_0}^{-1} \circ (T \circ f)(Z) = H(f(Z) - f(Z_0))[I + B^{-1}C(f(Z) \\
- f(Z_0))]^{-1}(Rf(Z_0) + S)^{-1}B_1^{-1}.
\end{aligned}
$$

再由(2.5.14),有

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{W}_{Z_0}^{-1} \circ (T \circ f)(Z)B_1(D_{Z_0}(T \circ f)(Z_0))^{-1} \\
&\quad = H(f(Z) - f(Z_0))[I + B^{-1}C(f(Z) - f(Z_0))]^{-1} \\
&\qquad \times (Rf(Z_0) + S)^{-1}[H(D_{Z_0}f(Z_0))(Rf(Z_0) + S)^{-1}]^{-1} \\
&\quad = H(W_{Z_0}^{-1} \circ f(Z))B(Rf(Z_0) + S)^{-1}[H(D_{Z_0}f(Z_0)) \\
&\qquad \times (Rf(Z_0) + S)^{-1}]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.5.21}
$$

如假设,当$|t|$充分小时,在(2.5.4)中以 Z_0+tZ_0 替代 Z_0 时恒有解,从而有

$$
2(Z_0 + tZ_0)C(Z_0 + tZ_0)D_{Z_0+tZ_0}f(Z_0 + tZ_0)
$$

$$= D^2_{Z_0+tZ_0} f(Z_0 + tZ_0).$$

将上式两端在 $t=0$ 处展开，比较 t^k $(k=2,3,4,\cdots)$ 的系数，就可得到

$$D^k_{Z_0} f(Z_0) = E_k(Z_0) D_{Z_0} f(Z_0) \quad (k=2,3,\cdots), \tag{2.5.22}$$

这里 $E_k \in \mathbf{C}^{m\times m}$.

由于

$$W_{Z_0}^{-1} \circ f(Z_0 + tZ_0)B = t\Big(D_{Z_0} f(Z_0) + D^2_{Z_0} f(Z_0)\frac{t}{2} + D^3_{Z_0} f(Z_0)\frac{t^3}{6} + \cdots\Big)\Big(I + B^{-1}CD_{Z_0} f(Z_0)t + B^{-1}CD^2_{Z_0} f(Z_0)\frac{t^2}{2} + B^{-1}CD^3_{Z_0} f(Z_0)\frac{t^3}{6} + \cdots\Big)^{-1}.$$

故由(2.5.22)，$W_{Z_0}^{-1} \circ f(Z)B$ 可以写成 $U(Z)D_{Z_0} f(Z_0)$，这里 $U(Z) \in \mathbf{C}^{m\times m}$. 因此

$$W_{Z_0}^{-1} \circ f(Z)B = W_{Z_0}^{-1} f(Z)B(D_{Z_0} f(Z_0))^{-1}(D_{Z_0} f(Z_0)). \tag{2.5.23}$$

在(2.5.21)中，令 $Z = Z_0 + tZ_0$，并应用(2.5.23)，则得

$$\begin{aligned}
&\widetilde{W}_{Z_0}^{-1} \circ (T \circ f)(Z_0 + tZ_0)B_1(D_{Z_0}(T \circ f)(Z_0))^{-1} \\
&= H(W_{Z_0}^{-1} \circ f(Z_0 + tZ_0))BD_{Z_0}^{-1} f(Z_0)H^{-1}HD_{Z_0} f(Z_0) \\
&\quad \times (Rf(Z_0) + S)^{-1}[H(D_{Z_0} f(Z_0))(Rf(Z_0) + S)^{-1}]^{-1} \\
&= H[W_{Z_0}^{-1} \circ f(Z_0 + tZ_0)BD_{Z_0}^{-1} f(Z_0)]H^{-1}.
\end{aligned}$$

由(2.5.6)，就可得到

$$S_k[T \circ f](Z_0) = HS_k[f](Z_0)H^{-1} \quad (k = 0,1,2,\cdots).$$

现在具体计算由(2.5.6)所定义的 $S_k[f](Z_0)$：

显然有：$S_0[f](Z_0) = 0$，$S_1[f](Z_0) = I$，而

$$S_2[f](Z_0) = (D^2_{Z_0} f(Z_0) - 2D_{Z_0} f(Z_0)B^{-1}CD_{Z_0} f(Z_0))B^{-1}B(D_{Z_0} f(Z_0))^{-1}$$

$$= D_{Z_0}^2 f(Z_0)(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1} - 2D_{Z_0}f(Z_0)B^{-1}C.$$

由(2.5.4),可得

$$S_2[f](Z_0) = 2Z_0CD_{Z_0}f(Z_0)(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1} - 2Z_0BB^{-1}C = 0,$$

再次应用(2.5.4)及 $S_2[f](Z_0)=0$, 可得

$$\begin{aligned} S_3[f](Z_0) = & (D_{Z_0}^3 f(Z_0) - 3D_{Z_0}^2 f(Z_0)B^{-1}CD_{Z_0}f(Z_0) \\ & + 6D_{Z_0}f(Z_0)(B^{-1}CD_{Z_0}f(Z_0))^2 \\ & - 3D_{Z_0}f(Z_0)B^{-1}CD_{Z_0}^2 f(Z_0))B^{-1}B(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1} \\ = & D_{Z_0}^3 f(Z_0)(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1} - 3D_{Z_0}^2 f(Z_0)B^{-1}C \\ & + 6(D_{Z_0}f(Z_0))B^{-1}C(D_{Z_0}f(Z_0))B^{-1}C \\ & - 3(D_{Z_0}f(Z_0))B^{-1}C(D_{Z_0}^2 f(Z_0))(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1} \\ = & D_{Z_0}^3 f(Z_0)(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1} - 6Z_0CZ_0BB^{-1}C \\ & + 6Z_0BB^{-1}CZ_0BB^{-1}C - 6Z_0CZ_0C \\ = & D_{Z_0}^3 f(Z_0)(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1} \\ & - \frac{3}{2}(D_{Z_0}^2 f(Z_0)(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1})^2 \\ = & \{f;Z_0\}, \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

这里$\{f;Z_0\}$就是§2.3中由 Ahlfors 观点得到的 Schwarz 导数(如果存在的话).

因此当 $m<n$ 时, 从 Thurston 观点得到的 Schwarz 导数 $S[f](Z_0)$(如果可定义的话)与从 Ahlfors 观点所得到的 Schwarz 导数$\{f;Z_0\}$(如果存在的话)是相一致的. 用同样方法,可以写出由(2.5.6)所定义的高阶 Schwarz 导数 $S_k[f](Z_0)(k=4,5,\cdots)$的具体表达式. 不在此一一计算了. 从而有如下定理:

定理2.5.1 若 $\Omega\subset\mathbb{C}^{m\times n}(m<n)$为域,$f:\Omega\to\mathbb{C}^{m\times n}$为 Ω 上局部双全纯映照,$Z_0\in\Omega$ 且为非异,若存在充分小的 ε,使得$|t|<\varepsilon$时,在方程(2.5.4)中以 Z_0+tZ_0代 Z_0时,恒有解,则由(2.5.6)所定义的 k 阶 Schwarz 导数是在 $R_1(m,n)$的紧对偶空间$CG(m,n)$的全纯自同构群作用下的相似不变量,其中 $k=0,1,2,\cdots$,且

$$S_3[f](Z_0) = S[f](Z_0) = \{f;Z_0\},$$

这里 $\{f;Z_0\}$ 为 § 2.3 中所定义的 Schwarz 导数.

以下讨论 $m=n$ 的情形:比起 $m<n$ 的情形来这要简单得多.这时,方程(2.5.2)及(2.5.4)都有唯一解.因此对于在 $\Omega\subset\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的局部双全纯映照 $f:\Omega\to\mathbf{C}^{n\times n}$ 在非异的点 $Z_0\in\Omega$ 既可用(2.5.1)来进行二阶逼近,也可用(2.5.3)进行二阶逼近.由前面的计算可知,若用(2.5.3)来进行二阶逼近,这时 $B(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1}=Z_0^{-1}$,由(2.5.6)所得到的 Schwarz 导数 $S[f](Z_0)=S_3[f](Z_0)$ 就是 § 2.3 中由 Ahlfors 观点得到的 Schwarz 导数 $\{f;Z_0\}$. 也就是说,这两种观点得到的 Schwarz 导数是相一致的.

如用(2.5.1)作为 $f(Z)$ 在 Z_0 点的二阶逼近,令

$$Z_0^{-1}W_{Z_0}^{-1}\cdot f(Z_0+tZ_0)=\sum_{k=0}^{\infty}S_k^*[f](Z_0)\frac{t^k}{k!}, \qquad (2.5.25)$$

定义 $S_k^*[f](Z_0)$ 为 f 在 Z_0 点的 k 阶 *-Schwarz 导数($k=0,1,2,3,\cdots$),特别称3阶 *-Schwarz 导数为 *-Schwarz 导数,记作 $S^*[f](Z_0)$. 如同上面一样,可以证明 $S_k^*[f](Z_0)$ ($k=0,1,2,3,\cdots$)都是在 $R_{\mathrm{I}}(n,n)$ 的紧对偶空间 $CG(n,n)$ 的全纯自同构群作用下的相似不变量.

经具体计算,可得:

$$S_0^*[f](Z_0) = 0,\ S_1^*[f](Z_0) = I,\ S_2^*[f](Z_0) = 0,$$

$$S_3^*[f](Z_0) = S^*[f](Z_0) = (D_{Z_0}f(Z_0))^{-1}\{f;Z_0\}(D_{Z_0}f(Z_0)),$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

即由(2.5.25)所定义的 *-Schwarz 导数 $S^*[f](Z_0)$ 与 § 2.3中由 Ahlfors 观点定义的 Schwarz 导数 $\{f;Z_0\}$ 是相似的.

于是有如下定理:

定理2.5.2 若 $\Omega\subset\mathbf{C}^{n\times n}$ 为域,$f:\Omega\to\mathbf{C}^{n\times n}$ 为局部双全纯映照,$Z_0\in\Omega$ 且为非异,则由(2.5.6)所定义的 k 阶 Schwarz 导数及由(2.5.25)所定义的 k 阶 *-Schwarz 导数都是在 $R_{\mathrm{I}}(n,n)$ 的紧对偶空间 $CG(n,n)$ 的全纯自同构群作用下的相似不变量. 特别是 Schwarz 导数 $S[f](Z_0)=S_3[f](Z_0)=\{f;Z_0\}$ 以及 *-Schwarz 导

数 $S^*[f](Z_0)=S_3^*[f](Z_0)=(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1}\{f;Z_0\}(D_{Z_0}f(Z_0))$，即 $S^*[f](Z_0)$与$\{f;Z_0\}$是相似的，这里$\{f;Z_0\}$为§2.3中所定义的 Schwarz 导数.

从上面对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的域上局部双全纯映照的 Schwarz 导数及高阶 Schwarz 导数的定义及讨论可以导出另一种对 $\mathbf{C}^N$ 中的域上局部双全纯映照的 Schwarz 导数及高阶 Schwarz 导数的定义.

熟知，对于任意正整数 N，一定可以至多写成四个平方数之和，即至多存在四个正整数 n_1、n_2、n_3及 n_4，使得 $N=n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2$（参阅文献[2.20]）. 当 N 可以写成四个平方数之和时，则可以将 $\mathbf{C}^N$ 看作一个矩阵空间：

$$\mathbf{C}^N=\mathbf{C}^{n_1\times n_1}\times\mathbf{C}^{n_2\times n_2}\times\mathbf{C}^{n_3\times n_3}\times\mathbf{C}^{n_4\times n_4}.$$

面 $\mathbf{C}^N$ 中的任一点 Z 可以表示成

$$Z=\begin{bmatrix}Z_1 & & & 0\\ & Z_2 & & \\ & & Z_3 & \\ 0 & & & Z_4\end{bmatrix},\tag{2.5.26}$$

这里$Z_1=(z_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n_1}$；$Z_2=(z_{ij})_{n_1+1\leqslant i,j\leqslant n_1+n_2}$；$Z_3=(z_{ij})_{n_1+n_2+1\leqslant i,j\leqslant n_1+n_2+n_3}$及 $Z_4=(z_{ij})_{n_1+n_2+n_3+1\leqslant i,j\leqslant n_1+n_2+n_3+n_4}$. 记 G_i 为 $R_{\rm I}(n_i,n_i)$的紧对偶空间 $CG(n_i,n_i)$ 的全纯自同构群($i=1,2,3,4$). 令

$$G=G_1\times G_2\times G_3\times G_4,$$

则 G 是 $R_{\rm I}(n_1,n_1)\times R_{\rm I}(n_2,n_2)\times R_{\rm I}(n_3,n_3)\times R_{\rm I}(n_4,n_4)$的紧对偶空间的全纯自同构群. 若

$$T=\begin{bmatrix}P & Q\\ R & S\end{bmatrix}\in G,\tag{2.5.27}$$

则有 $\det T\neq0$，且 P、Q、R 及 $S\in\mathbf{C}^{n_1\times n_1}\times\mathbf{C}^{n_2\times n_2}\times\mathbf{C}^{n_3\times n_3}\times\mathbf{C}^{n_4\times n_4}$，即

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & & & 0\\ & P_2 & & \\ & & P_3 & \\ 0 & & & P_4\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}Q_1 & & & 0\\ & Q_2 & & \\ & & Q_3 & \\ 0 & & & Q_4\end{bmatrix},$$

$$R=\begin{pmatrix} R_1 & & & 0 \\ & R_2 & & \\ & & R_3 & \\ 0 & & & R_4 \end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix} S_1 & & & 0 \\ & S_2 & & \\ & & S_3 & \\ 0 & & & S_4 \end{pmatrix},$$

这里 P_i、Q_i、R_i、$S_i \in \mathbf{C}^{n_i \times n_i}$ $(i=1,2,3,4)$.

由(2.5.27)定义的 T 作用于由(2.5.26)定义的 Z,定义为

$$\begin{aligned} T(Z) &= (PZ+Q)(RZ+S)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (P_1Z_1+Q_1)(R_1Z_1+S_1)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (P_4Z_4+Q_4)(R_4Z_4+S_4)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是 G 仍可视为 $\mathbf{C}^N$ 上的一个 Möbius 变换群. $T \in G$ 称为 Möbius 变换.

若 $\Omega \subset \mathbf{C}^N$ 为域,$f(Z):\Omega \to \mathbf{C}^N$ 为 Ω 上局部双全纯映照,将 Z 与 f 表示成(2.5.26)的形式,且取 $Z_0 \in \mathbf{C}^N$,使得用(2.5.26)表示时,矩阵为非异的. 于是可以考虑 $f(Z)$ 在 Z_0 点的二阶逼近,即考虑

$$W_{Z_0}(Z) = A + (I - ZC)^{-1}ZB,$$

且要求 A、B、C 满足

$$A = f(Z_0),\ Z_0B = D_{Z_0}f(Z_0),\ Z_0CZ_0B = \frac{1}{2}D_{Z_0}^2f(Z_0),$$

这里 A、B、C、D、$Z \in \mathbf{C}^{n_1 \times n_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{n_4 \times n_4}$. 由于 $f(Z)$在 Ω 上是局部双全纯映照,故 $J_f(Z_0)$为非异的,于是就可以考虑

$$\begin{aligned} W_{Z_0}^{-1} \circ f(Z) &= (f(Z) - A)(Cf(Z) - CA - B)^{-1} \\ &= (f(Z)-f(Z_0))(I+B^{-1}C(f(Z)-f(Z_0)))^{-1}B^{-1}. \end{aligned}$$

由于 Z_0为非异,故当$|t|$充分小时,有

$$W_{Z_0}^{-1} \circ f(Z_0 + tZ_0)Z_0^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k[f](Z_0)\frac{t^k}{k!}. \quad (2.5.28)$$

式中 $S_k[f](Z_0)$定义为 $f(Z)$在点 Z_0处的 k 阶 Scbwarz 导数($k=0,1,2,3,\cdots$),而定义 $S_3[f](Z_0)$为 $f(Z)$在点 Z_0处的 Schwarz 导数. 由前面的讨论可知,这样定义的 $S_k[f](Z_0)$是在 G 作用下的相

似不变量.

当然,这样定义的 k 阶 Schwarz 导数是依赖于 $N=n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2$ 的分拆. 如果分拆不止一种,则这样定义的 k 阶 Schwarz 导数也不止一种. 经直接计算,由(2.5.28)所定义的 $S_k[f](Z_0)$为

$$S_0[f](Z_0)=0,\ S_1[f](Z_0)=I,\ S_2[f](Z_0)=0,$$

以及

$$\begin{aligned}S[f](Z_0)&=S_3[f](Z_0)\\&=D_{Z_0}^3f(Z_0)(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1}\\&\quad-\frac{3}{2}(D_{Z_0}^2f(Z_0)(D_{Z_0}f(Z_0))^{-1})^2,\\&\quad\cdots\cdots,\end{aligned}$$

于是可以利用 §2.3 中的方法来证明 $S[f](Z_0)=0$ 对所有 $Z\in\Omega$ 都成立,当且仅当

$$f(Z)=\begin{bmatrix}F_1(Z)&&&0\\&F_2(Z)&&\\&&F_3(Z)&\\0&&&F_4(Z)\end{bmatrix},$$

这里

$$F_i(Z)=(A_i(Z)+B_i)(C_i(Z)+D_i)^{-1},$$

或是

$$F_i(Z)=(C_i(Z)+D_i)^{-1}(A_i(Z)+B_i),$$

而 A_i、B_i、C_i、$D_i\in\mathbf{C}^{n_i\times n_i}$, $A_i(Z)$及$C_i(Z)$为 Z 的元素的一次齐次式($i=1,2,3,4$).

如果 N 不能表成四个平方数之和,则 N 可能是平方数,或表示成两个平方数之和或表成三个平方数之和. 则上述讨论依然可以进行,只是 $\mathbf{C}^N=\mathbf{C}^{n_1\times n_1}$(已讨论过), $\mathbf{C}^N=\mathbf{C}^{n_1\times n_1}\times\mathbf{C}^{n_2\times n_2}$, 或是 $\mathbf{C}^N=\mathbf{C}^{n_1\times n_1}\times\mathbf{C}^{n_2\times n_2}\times\mathbf{C}^{n_3\times n_3}$, 可以得到相应的结果.

更一般地,如将 N 分拆成 $N=m_1\times n_1+\cdots+m_s\times n_s$, 则将 $\mathbf{C}^N$ 表成 $\mathbf{C}^{m_1\times n_1}\times\cdots\times\mathbf{C}^{m_s\times n_s}$, 而 $\mathbf{C}^N$ 中一点 Z 可以表成

$$Z=\begin{bmatrix}Z_1&&0\\&\ddots&\\0&&Z_s\end{bmatrix},$$

这里 $Z_i \in \mathbf{C}^{m_i \times n_i}(i=1,2,\cdots,s)$. 而上述的讨论同样可以进行，并可得到相应的结果. 不在此一一叙述了.

§ 2.6 全纯曲线的 Schwarz 曲率

在 § 2.1中，已经简要地回顾了单复变数的函数的 Schwarz 导数的几种不同的引入的途径与观点，这些都可作为引入高维空间上的映照的 Schwarz 导数的出发点. 在前几节中已经讨论了三种观点与途径以推广到高维空间中的可能性. 在这一节中，将沿着第四种观点与途径以推广到高维空间中的映照的 Schwarz 导数的可能性，即 Schwarz 导数可看成一维射影空间(射影直线)上的曲线的自然引入的一种自然不变量——曲率. 所用的方法是 E. Cartan 的活动标架法，这是 H. Flanders 的观点(参阅文献[2.7]).

高为奇[2.9]将这种观点推广到高维，定义了高维射影空间上的全纯曲线的 Schwarz 曲率，并得到了有意义的结果. 在这一节就介绍他的工作.

若 $D \subset \mathbf{C}$ 为单连通区域，例如可为单位圆盘，$\phi: D \to \mathbf{CP}^n$ 为 n 维复射影空间 $\mathbf{CP}^n$ 中的一条曲线. 当然这可表为 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中的曲线 $f: D \to \mathbf{C}^{n+1}$，$f_1$ 与 f_2 是等价的当且仅当有 $\lambda \neq 0$，$f_1 = \lambda f_2$.

对曲线 f 选取活动标架(Moving frame)如下：

以 $v = \lambda f, \lambda \neq 0$为第一个向量，$v$ 的各阶导数：$e_1 = v', e_2 = e_1', \cdots, e_n = e_n'$为另外 n 个向量. 以$[\cdots]$表示行列式，则$[f, f', \cdots, f^{(n)}] \neq 0$或$[f, f', \cdots, f^{(n)}] \equiv 0$. 当$[f, f', \cdots, f^{(n)}] \neq 0$时，则除去最多一个可列点列以外，$[f, f', \cdots, f^{(n)}] \neq 0$. 于是可以选取 λ，使得

$$\lambda^{n+1}[f, f', \cdots, f^{(n)}] = 1 \tag{2.6.1}$$

在 D 中去掉最多一个可列点列后成立. 于是由(2.6.1)及行列式的性质，即可导出：最多除去一个可列点列，有

$$[v, e_1, \cdots, e_n] = 1. \tag{2.6.1'}$$

这样的标架称为曲线 $f(Z)$的标准标架(canonical frame)，这是依赖于参数的选取.

对(2.6.1′)求导数，由行列式的性质，有

$$[v, e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n'] = 0.$$

由此可得：

$$\alpha_0 v + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j e_j + \alpha_n e_n' = 0.$$

由于 $v, e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n'$ 在 D 中全纯，所以 $\alpha_i (i=0, \cdots, n)$ 在 D 中也全纯. 若$\alpha_n \not\equiv 0$，则去掉最多一个可列点列以外，$\alpha_n \neq 0$，因此，令$\kappa_i = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_n}$ $(i=0, \cdots, n-1)$，就有

$$e_n' = \kappa_0 v + \kappa_1 e_1 + \cdots + \kappa_{n-1} e_{n-1}. \tag{2.6.2}$$

若 $\alpha_n \equiv 0$，则一定可以找到 $n > l \geqslant 1$，使得 $\alpha_l \not\equiv 0$，而 $\alpha_k \equiv 0$ $(k > l)$，于是

$$\alpha_0 v + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_l e_l = 0.$$

于是除去最多一个可列点列以外，

$$e_l = -\frac{\alpha_0}{\alpha_l} v - \frac{\alpha_1}{\alpha_l} e_1 - \cdots - \frac{\alpha_{l-1}}{\alpha_l} e_{l-1}$$

成立. 对上式微分 $n-l+1$ 次就可得到

$$e_n' = \kappa_0 v + \kappa_1 e_1 + \cdots + \kappa_{n-1} e_{n-1} \tag{2.6.2}$$

除去最多一个可列点列以外都成立，这里 $\kappa_s \equiv 0$，当 $s > l$ 时. 在公式(2.6.2)中的 $\kappa_0, \kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1}$ 称为曲线 ϕ 的 Schwarz 曲率.

至于$[f, f', \cdots, f^{(n)}] \equiv 0$的情形也可一样处理. 由此可得$[v, e_1, \cdots, e_n] = 0$，求导也可得到(2.6.2)形式的等式并同样定义 $\kappa_0, \kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1}$ 为曲线 ϕ 的 Schwarz 曲率.

综上所述，就有 Frenet 方程：

$$\begin{cases} v' = e_1, \\ e_1' = e_2, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ e_{n-1}' = e_n, \\ e_n' = \kappa_0 v + \kappa_1 e_1 + \cdots + \kappa_{n-1} e_{n-1}. \end{cases}$$

这也可以写为：

$$(v, e_1, \cdots, e_n)' = (v, e_1, \cdots, e_n)\kappa,$$

这里

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \kappa_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

先证明如下的定理：

定理2.6.1 Schwarz 曲率是在 $\mathbf{CP}^n$ 中射影变换下的不变量.

证 要证的等价于 Schwarz 曲率是在 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中的仿射变换下的不变量.

若 $A:\mathbf{C}^{n+1}\to\mathbf{C}^{n+1}$ 为仿射变换，令 $\tilde{f}=A\circ f$, $\tilde{v}$, $\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n$ 为相应的标准标架，则

$$\begin{aligned} 1 &= [\tilde{v}, \tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n] \\ &= \tilde{\lambda}^{n+1}[A\circ f,\ A\circ f',\ \cdots,\ A\circ f^{(n)}] \\ &= \tilde{\lambda}^{n+1}\det A[f,f',\cdots,f^{(n)}]. \end{aligned}$$

将此式与(2.6.1)相比较，即得

$$\tilde{\lambda} = \lambda\alpha,$$

这里 α 为 $(\det A)^{-1}$ 的$(n+1)$ 次根. 于是

$$\tilde{v} = \lambda\alpha A\circ f = \alpha A\circ\lambda f = \alpha A\circ v$$

以及

$$\tilde{e}_i = \alpha A\circ e_i \quad (i = 1,\cdots,n).$$

因此

$$\begin{aligned} (\tilde{v}\ \tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)' &= \alpha A(v,e_1,\cdots,e_n)' \\ &= \alpha A(v,e_1,\cdots,e_n)\kappa = (\tilde{v},\ \tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n)\kappa. \end{aligned}$$

这就证明了 Schwarz 曲率的不变性质.

正是由于有这样的不变性质，所以我们有理由称 $\kappa_0,\kappa_1,\cdots,\kappa_{n-1}$ 为曲率，而所以称为 Schwarz 曲率，这在后面可以看到，当 $n=1$ 时，κ_0 就是由(2.1.4)所定义的 Schwarz 导数乘以一个常数. 这种观点实际上是从不变量的角度来推广 Schwarz 导数的概念.

从 Schwarz 曲率的定义，可以导出如下的性质：

定理2.6.2 1）曲线 ϕ 的 Schwarz 曲率全为零，当且仅当 ϕ 为 n 次多项式的有理分式.

2）曲线 ϕ 的 Schwarz 曲率全为常数(不全为零)，当且仅当 ϕ 为常系数常微分方程：

$$y^{(n+1)} = \kappa_0 y + \kappa_1 y' + \cdots + \kappa_{n-1} y^{(n-1)}$$

的 $n+1$ 个线性独立解的线性组合的有理分式.

3）任给 n 个在 D 中全纯的函数 $\kappa_0(z),\cdots,\kappa_{n-1}(z)$，则在 $\mathbf{CP}^n$ 中存在曲线 ϕ，以 $\kappa_0(z),\cdots,\kappa_{n-1}(z)$ 为其 Schwarz 曲率.

显然定理中的 1）就是本章一开始的定理2.1.1的推广. 因为 $n=1$，这就是定理2.1.1. 而定理中的 2）是对此进一步的讨论. 定理中的 3）是存在性定理.

下面证明定理2.6.2.

1）如果所有 Schwarz 曲率均为零，则 $e_n'=0$. 这导出 λf 的各个分量为次数等于或小于 n 的多项式. 于是 ϕ 成为在 $\mathbf{CP}^n$ 中的 n 次多项式的有理分式，即

$$\phi = \left(\frac{P_1(z)}{P_0(z)},\cdots,\frac{P_n(z)}{P_0(z)}\right),$$

这里 $P_j(z)$ $(j=0,\cdots,n)$为次数等于或小于 n 的多项式.

反过来，如果 ϕ 为 n 次多项式的有理分式，则 $e_n'=0$，故所有 Schwarz 曲率均为零.

2）如果所有 Schwarz 曲率均为常数，即 $\kappa_i(z)=\kappa_i$ $(i=0,\cdots,n-1)$，则

$$y^{(n+1)} = \kappa_0 y + \kappa_1 y' + \cdots + \kappa_{n-1} y^{(n-1)}. \qquad (2.6.3)$$

而$(n+1)$阶常系数常微分方程

$$y^{(n+1)} = \kappa_0 y + \kappa_1 y' + \cdots + \kappa_{n-1} y^{(n-1)} \qquad (2.6.4)$$

有 $n+1$个线性独立的解：$y_0,y_1,\cdots,y_n$. 这些解或为指数函数，或为三角函数，于是由(2.6.3)，λf 为这些 y 的线性组合，即

$$\phi = \left(\frac{L_1}{L_0},\cdots,\frac{L_n}{L_0}\right),$$

这里 $L_i(i=0,\cdots,n)$ 为 y 的线性组合.

反过来,如果 ϕ 为方程(2.6.4)的 $n+1$个线性独立解的线性组合的有理分式,则可以导出(2.6.3).故所有 Schwarz 曲率为常数.

3) 若 $\kappa_0(z),\kappa_1(z),\cdots,\kappa_{n-1}(z)$为 D 中 n 个全纯函数,则齐次方程

$$y^{(n+1)} = k_0(z)y + k_1(z)y' + \cdots + k_{n-1}(z)y^{(n-1)} \quad (2.6.5)$$

有 $n+1$ 个线性独立解 $y_0,y_1,\cdots,y_n$. 令

$$\phi = \left(\frac{y_1}{y_0},\cdots,\frac{y_n}{y_0}\right),$$

则 $f=(y_0,y_1,\cdots,y_n)$为 ϕ 在 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中的一个表示，如同前面得到 $e_n'=\kappa_0\nu+\kappa_1e_1+\cdots+\kappa_{n-1}e_{n-1}$ 的讨论那样,由(2.6.5)可得到:

$$f^{(n+1)} = k_0f + k_1f' + \cdots + k_{n-1}f^{(n-1)}. \quad (2.6.6)$$

因此

$$[f,f',\cdots,f^{(n)}]' = [f,f',\cdots,f^{(n-1)},f^{(n+1)}] = 0.$$

于是$[f,f',\cdots,f^{(n)}]=C$ 为一常数. 选择 λ 为 C 的 $n+1$ 次根,就得到标准标架,且(2.6.6)等价于

$$e_n' = k_0\nu + k_1e_1 + \cdots + k_{n-1}e_{n-1}.$$

这就证明了3).

从上述证明过程中可以看出,以 $\kappa_0(z),\kappa_1(z),\cdots,\kappa_{n-1}(z)$为 Schwarz 曲率的曲线 λf 必有 $\lambda f=(y_0,y_1,\cdots,y_n)$的形式,这里 y_i $(i=0,\cdots,n)$ 为方程(2.6.5)的线性独立解.

以下我们进一步给出映照的 Schwarz 导数的表达式.

由(2.6.3)，Schwarz 曲率 $\kappa_0,\kappa_1,\cdots,\kappa_{n-1}$ 可表为

$$\kappa_0 = [e_n',e_1,\cdots,e_n] = (-1)^n[e_1,\cdots,e_n,e_n'],$$

$$\kappa_1 = [\nu,e_n',e_2,\cdots,e_n] = (-1)^{n-1}[\nu,e_2,\cdots,e_n,e_n'],$$

………

$$\kappa_{n-1} = [\nu,e_1,\cdots,e_{n-2},e_n',e_n] = -[\nu,e_1,\cdots,e_{n-2},e_n,e_n'].$$

所以所有这些 Schwarz 曲率,除了可能相差符号外,均为$(n+1)\times(n+2)$ 矩阵:

$$(\nu, e_1, \cdots, e_n, e_n') = (\nu, \nu', \cdots, \nu^{(n)}, \nu^{(n-1)})$$

中 $(n+1)\times(n+1)$ 子矩阵的行列式. 由于 $\nu=\lambda f$, 故

$$\begin{aligned}(\nu, \nu', \cdots, \nu^{(n)}, \nu^{(n+1)}) &= (f, f', \cdots, f^{(n+1)})\Lambda \\ &= (f, f', \cdots, f^{(n)})G\Lambda \\ &= (f, f', \cdots, f^{(n)})H,\end{aligned}$$

这里

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' & \cdots & \lambda^{(n+1)} \\ 0 & \lambda & 2\lambda' & \cdots & \binom{n+1}{1}\lambda^{(n)} \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & \binom{n+1}{2}\lambda^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

为一个 $(n+2)\times(n+2)$ 方阵, 而

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & g_0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & g_n \end{pmatrix}$$

为一个 $(n+1)\times(n+2)$ 矩阵, 而

$$H = G\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' & \cdots & \lambda^{(n)} & \lambda^{(n+1)} + \lambda g_0 \\ 0 & \lambda & 2\lambda' & \cdots & \binom{n}{1}\lambda^{(n-1)} & \binom{n+1}{1}\lambda^{(n)} + \lambda g_1 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & \binom{n}{2}\lambda^{(n-2)} & \binom{n+1}{2}\lambda^{(n-1)} + \lambda g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \binom{n+1}{n}\lambda' + \lambda g_n \end{pmatrix}.$$

$f^{(n+1)}$ 可以表为 f 的低阶导数的线性组合, 即

$$f^{(n+1)} = g_0 f + g_1 f' + \cdots + g_n f^{(n)}. \qquad (2.6.7)$$

另一方面, 由于我们选择了标准标架, 故

$$[\nu,\nu',\cdots,\nu^{(n)}]=1,$$

也就是

$$\lambda^{n+1}[f,f',\cdots,f^{(n)}]=1.$$

将上式两端求导,得到

$$(n+1)\lambda^{n}\lambda'[f,f',\cdots,f^{(n)}]$$
$$+\lambda^{(n+1)}[f,f',\cdots,f^{(n-1)},f^{(n+1)}]=0.$$

由(2.6.1)及(2.6.7),得到

$$(n+1)\lambda'+\lambda g_n=0,$$

也就是 H 中$(n+1,n+2)$元素为零.

讨论方程组:

$$\begin{cases}\lambda x_0+\lambda' x_1+\lambda'' x_2+\cdots+\lambda^{(n)}x_n=\lambda^{(n+1)}+\lambda g_0,\\ \lambda x_1+2\lambda' x_2+\cdots+\binom{n}{1}\lambda^{(n-1)}x_n=\binom{n+1}{1}\lambda^{(n)}+\lambda g_1,\\ \lambda x_2+\cdots+\binom{n}{2}\lambda^{(n-2)}x_n=\binom{n+1}{2}\lambda^{(n-1)}+\lambda g_2,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \lambda x_n=\binom{n+1}{n}\lambda'+\lambda g_n,\end{cases}$$

即以 H 为方程组的系数方阵. 由于(2.6.1),这个方程组的解 $x_j=\kappa_j$ $(j=0,1,\cdots,n-1)$. 而 $x_n=0$. 此方程组也可写成:

$$\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}\lambda^{(k-j)}x_k=\binom{n+1}{j}\lambda^{(n-j+1)}+\lambda g_j\quad(j=0,1,\cdots,n).$$

于是 Schwarz 曲率满足如下的递归关系式:

$$\sum_{k=j}^{n-1}\binom{k}{j}\lambda^{(k-j)}\kappa_k=\binom{n+1}{j}\lambda^{(n-j+1)}+\lambda g_j\quad(j=0,1,\cdots,n-1),\tag{2.6.8}$$

而 $\lambda^{(0)}=\lambda$.

现在讨论 $n=1$的情形:这时 $j=0$,于是有

$$\lambda\kappa_0=\lambda''+\lambda g_0.$$

这时 $\phi=x(z)$, $f=(1,x)$. 故 $\lambda=[f,f']^{\frac{-1}{2}}=x'^{\frac{-1}{2}}$. 而 $f''=(0,x'')$

$=\frac{x''}{x'}f'$，故 $g_0=0$，$g_1=\frac{x''}{x'}$，因此

$$\kappa_0=\frac{\lambda''}{\lambda}=\frac{3}{4}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x'''}{x'}\right).$$

这就是 § 2.1中所定义的 Schwarz 导数乘以常数.

其次讨论 $n=2$ 的情形:这时 $j=0,1$. 于是有

$$\begin{cases}\lambda\kappa_0+\lambda'\kappa_1=\lambda'''+\lambda g_0,\\ \lambda\kappa_1=3\lambda''+\lambda g_1.\end{cases}$$

这时 $\phi=(x(z),y(z))$，$f=(1,x(z),y(z))$. 故

$$\lambda=[f,f',f'']^{-\frac{1}{3}}=(x'y''-x''y')^{-\frac{1}{3}},$$

而
$$f'''=-\frac{x''y'''-x'''y''}{x'y''-x''y'}f'+\frac{x'y'''-x'''y'}{x'y''-x''y'}f''.$$

所以

$$g_0=0,\ g_1=-\frac{x''y'''-x'''y''}{x'y''-x''y'},\ g_2=\frac{x'y'''-x'''y'}{x'y''-x''y'}.$$

这就得到

$$\kappa_1=\frac{3\lambda''}{\lambda}+g_1,\ \kappa_0=-\frac{3\lambda'\lambda''}{\lambda^2}-\frac{\lambda'}{\lambda}g_1+\frac{\lambda'''}{\lambda}.$$

如果记 $\sigma_{ij}=x^{(i)}y^{(j)}-x^{(j)}y^{(i)}$,则

$$\lambda=\sigma_{12}^{-\frac{1}{3}},\ g_1=\sigma_{12}^{-1}\sigma_{23},$$

而且有

$$\frac{\lambda'}{\lambda}=-\frac{\sigma_{13}}{3\sigma_{12}},$$

$$\frac{\lambda''}{\lambda}=\frac{4}{9}\left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{12}}\right)^2-\frac{1}{3}\frac{\sigma_{14}+\sigma_{23}}{\sigma_{12}},$$

$$\frac{\lambda'''}{\lambda}=-\frac{28}{27}\left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{12}}\right)^3+\frac{4}{3}\frac{\sigma_{13}(\sigma_{14}+\sigma_{23})}{\sigma_{12}^2}-\frac{1}{3}\frac{\sigma_{15}+\sigma_{24}}{\sigma_{12}}.$$

因而得到

$$\begin{cases}\kappa_1=\frac{4}{3}\left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{12}}\right)^2-\frac{\sigma_{14}+2\sigma_{23}}{\sigma_{12}};\\ \kappa_0=-\frac{16}{27}\left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{12}}\right)^3+\frac{1}{3}\frac{\sigma_{13}(3\sigma_{14}+2\sigma_{23})}{\sigma_{12}^2}-\frac{1}{3}\frac{\sigma_{15}+2\sigma_{24}}{\sigma_{12}}.\end{cases}\tag{2.6.9}$$

归纳起来，可得如下的定理：

定理2.6.3 Schwarz 曲率满足递归关系(2.6.8).

当 $n=1$时，Schwarz 曲率 κ_0就是 § 2.1中所定义的 Schwarz 导数乘以常数.

当 $n=2$时，Schwarz 曲率 κ_0和 κ_1由(2.6.9)给出. 而 $\sigma_{ij}=x^{(i)}y^{(j)}-x^{(j)}y^{(i)}$.

以下给出映照的 Schwarz 曲率在进行坐标变换时的变换公式.

若 $z=z(w)$ 为 D 中的坐标变换，如前所述，Schwarz 曲率在这个变换下不是不变量，而是满足一些变换规则.

对 z 求导记作撇"$'$"，对 w 求导记作点"$\cdot$"，以 w 为变量得到的量上加波纹号"～"，于是：当 $n=1$ 时，有

$$\tilde{\kappa}_0=\dot{z}^2\kappa_0+S_z. \tag{2.6.10}$$

当 $n=2$时，有

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1&=\dot{z}^2\kappa_1+4S_z,\\ \tilde{\kappa}_0&=\dot{z}^3\kappa_0+\dot{z}\ddot{z}\kappa_1+2(S_z)',\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

这里

$$S_z=\frac{3}{4}\left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\dddot{z}}{\dot{z}}\right),$$

为由 § 2.1中所定义的 Schwarz 导数乘以常数. 当 $n>2$时，为了求得 Schwarz 导数的变换公式，要用到链法则多项式(chain rule polynonial).

若 $h(z)$为 z 的 C^∞函数，则由链法则 $h(z)$对 w 求 m 次导数后得到 $h^{(m\cdot)}$ 可以表示为：

$$h^{(m\cdot)}=\sum_{j=0}^{m}Q_j^m(\dot{z},\ddot{z},\cdots)h^{(j)}\quad(m=0,1,2,\cdots). \tag{2.6.12}$$

这里 $Q_j^m(\dot{z},\ddot{z},\cdots)$为$\dot{z},\ddot{z},\cdots$的多项式函数. 以下讨论中，简记作 $Q_j^m(\dot{z})$. 这种多项式称之为链法则多项式(参阅文献[2.31]). 显

然，当 $m \geqslant 1$ 时，

$$Q_0^m = 0;$$

当 $j > m$ 时，令

$$Q_j^m = 0.$$

而 $Q_j^m(\dot{z})$并不意味着 Q_j^m 只与$\dot{z}$有关，而与$\ddot{z}$，…等无关，这只是 $Q_j^m(\dot{z}, \ddot{z}, \cdots)$的省略记号. 于是可以建立如下的无穷上三角矩阵：

$$\begin{pmatrix} Q_0^0(\dot{z}) & Q_0^1(\dot{z}) & Q_0^2(\dot{z}) & \cdots \\ 0 & Q_1^1(\dot{z}) & Q_1^2(\dot{z}) & \cdots \\ 0 & 0 & Q_2^2(\dot{z}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

这是可逆矩阵，且

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_j^k(\dot{z}) \cdot Q_k^m(w') = \delta_j^m \quad (j, m = 0, 1, 2, \cdots).$$

实际上，上述求和只有有限项.

链法则多项式可以明确表达出来，

$$Q_j^m(\dot{z}) = Q_j^m(\dot{z}, \cdots, z^{(m-j+1\cdot)}) = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_j = m \\ k_i > 0}} \frac{m!}{k_1! \cdots k_j!} z^{(k_1\cdot)} \cdots z^{(k_j\cdot)}. \tag{2.6.13}$$

于是有

$$Q_1^m(\dot{z}) = z^{(m\cdot)}, \quad Q_m^m(\dot{z}) = \dot{z}^m, \quad Q_{m-1}^m(\dot{z}) = \binom{m}{2} \dot{z}^{m-2} \ddot{z}$$

以及
$$Q_{m-2}^m(\dot{z}) = 3\binom{m}{4} \dot{z}^{m-4} \ddot{z}^2 + \binom{m}{3} \dot{z}^{m-3} \dddot{z}$$

等等.

在坐标变换 $z = z(w)$之下，有

$$\begin{aligned} 1 &= \tilde{\lambda}^{n+1}[f, \dot{f}, \cdots, f^{(n\cdot)}] \\ &= \tilde{\lambda}^{n+1}[f, f', \cdots, f^{(n)}] \det(Q_j^m(\dot{z}))_{0 \leqslant m, j \leqslant n} \end{aligned}$$

$$= \tilde{\lambda}^{n+1}[f, f', \cdots, f^{(n)}]\prod_{m=0}^{n} Q_m^m(\dot{z}).$$

于是 $\lambda^{n+1} = \tilde{\lambda}^{n+1}\dot{z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. 因此可取 $\lambda = \tilde{\lambda}\,\dot{z}^{\frac{n}{2}}$，而 $\nu = \lambda f = \dot{z}^{\frac{n}{2}}\tilde{\lambda} f = \dot{z}^{\frac{n}{2}}\tilde{\nu}$. 由 Schwarz 曲率的定义，有

$$\tilde{\nu}^{(n+1\cdot)} = \tilde{\kappa}_0\tilde{\nu} + \tilde{\kappa}_1\tilde{\nu}^{\cdot} + \cdots + \tilde{\kappa}_{n-1}\tilde{\nu}^{(n+1\cdot)}. \qquad (2.6.14)$$

由于 $\nu = \dot{z}^{\frac{n}{2}}\tilde{\nu}$，故

$$\tilde{\nu}^{(n+1\cdot)} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left(\dot{z}^{\frac{n}{2}}\right)^{(n-j+1\cdot)}\nu^{(j\cdot)}. \qquad (2.6.15)$$

但是

$$\nu^{(j\cdot)} = \sum_{k=0}^{j} Q_k^j(\dot{z})\nu^{(k)}, \qquad (2.6.16)$$

以及

$$\nu^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n-1}\kappa_k\nu^{(k)}, \qquad (2.6.17)$$

$$\nu^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} Q_l^k(w')\nu^{(l\cdot)}, \qquad (2.6.18)$$

$$\nu^{(l\cdot)} = \sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}\left(\dot{z}^{\frac{n}{2}}\right)^{(l-m\cdot)}\tilde{\nu}^{(m\cdot)}. \qquad (2.6.19)$$

将(2.6.19)代入(2.6.18)，然后将(2.6.18)代入(2.6.17)，继之将(2.6.17)、(2.6.18)代入(2.6.16)，再继之将(2.6.16)代入(2.6.15)，这就得到 $\tilde{\nu}^{(n+1\cdot)}$ 可以用 $\tilde{\nu}^{(m\cdot)}$ $(m=0,\cdots,n-1)$的线性组合来表达. 将此式与(2.6.14)相比较，就得到

$$\tilde{\kappa}_m = \sum_{k=m}^{n-1} A_m^k\kappa_k + B_m, \qquad (2.6.20)$$

这里

$$A_m^k = \dot{z}^{\frac{n}{2}+1}\sum_{l=m}^{k}\binom{l}{m}\left(\dot{z}^{\frac{n}{2}}\right)^{(l-m\cdot)}Q_l^k(w') \qquad (2.6.21)$$

以及

$$B_m = -\dot{z}^{\frac{n}{2}+1}\sum_{l=m}^{n+1}\binom{l}{m}\left(\dot{z}^{\frac{n}{2}}\right)^{(l-m\cdot)}Q_l^{n+1}(w'). \qquad (2.6.22)$$

当 $m=n-1$ 时，经过简单计算可得到

$$\widetilde{\kappa}_{n-1} = \dot{z}^2\kappa_{n-1} + \binom{n+2}{3} S_z. \qquad (2.6.23)$$

在(2.6.20)中,变换系数 A_m^k 及 B_m 是与曲线 f 无关的. 将(2.6.20)作用到 n 次多项式有理分式曲线 f 上,而 $z=z(w)$ 为一有理线性分式变换,则由定理2.6.2 的 1), $\kappa_m=0$, $\widetilde{\kappa}_m=0$ (当 $m=0,\cdots,n-1$), 因此 $B_m=0$. 故 B_m ($m=0,\cdots,n-1$)对所有有理线性分式变换均为零.

总结起来,有如下的定理:

定理2.6.4 若 $D\subset\mathbf{C}$ 为单连通区域,D 中的点为 z,$\phi:D\to\mathbf{CP}^n$ 为 n 维复射影空间 $\mathbf{CP}^n$ 中的一条曲线. 其 Schwarz 曲率为 κ_k ($k=0,\cdots,n-1$). 若 $z=z(w)$ 为 D 中的坐标变换,经变换后,曲线的 Schwarz 曲率为 $\widetilde{\kappa}_k$ ($k=0,\cdots,n-1$). 则有变换公式(2.6.20),其中 A_m^k、B_m 分别由(2.6.21)及(2.6.22)所定义,而点"·"表示对 z 求导,撇"′"表示对 w 求导.
当 $n=1$ 时,有公式(2.6.10),当 $n=2$ 时,有公式(2.6.11). 而当 $m=n-1$时,有公式(2.6.23).

当 $z=z(w)$为有理线性分式变换时,$B_m=0$对任意 $m=0,\cdots,n-1$ 都成立,于是变换公式成为

$$\widetilde{\kappa}_m = \sum_{k=m}^{n-1} A_m^k \kappa_k \quad (k=0,\cdots,n-1).$$

综上所述,本节内容为用不变量的观点来看待及推广 Schwarz 导数的概念,当然还可望得到进一步的发展.

§2.7 Kähler 流形上全纯映照的 Schwarz 导数

在本章的最后一节中,我们讨论 Kähler 流形上全纯映照的 Schwarz 导数.

若 M、N 为两个有相同维数的 Kähler 流形,$f:M\to N$ 为全纯浸入(holomorphic immersion),即局部双全纯,在本章中,将定义 f 的 Schwarz 导数 S_f. 还要证明:

1) 若 $S_f=0$ 及 $S_g=0$,则 $S_{f\cdot g}=0$(定理2.7.1);

2) 推广的 Nehari 定理(定理2.7.2).

在本节中,将应用和号省略办法.本节内容为余其煌和龚昇以及那吉生的文献[2.12]和[2.13]的内容.

若 M、N 为两个有相同维数,且有度量 $dS_M^2=2g_{i\bar{j}}dz^i\overline{dz^j}$ 及 $dS_N^2=2h_{\alpha\bar{\beta}}dw^\alpha\overline{dw^\beta}$ 的 Kähler 流形.其相应的(1,0)联络为 ∇ 及 $\widetilde{\nabla}$. 若 $f:M\to N$ 为全纯浸入,$\chi(M)$ 为 M 上定义的(1,0)型 $\mathbf{C}^\infty$ 向量场的集合.定义 f 的导数及其高阶导数如下:

$$Df:\chi(M)\to\chi(N),$$
$$Df(X)=f_*X. \tag{2.7.1}$$

这里 f_* 为 f 的微分,即

$$f_*:\ T_zM\to T_{f(z)}N,$$
$$f_*\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i}=\xi^i\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial w^\alpha}; \tag{2.7.2}$$

$$D^2f:\ \chi(M)\times\chi(M)\to\chi(N),$$
$$D^2f(X,Y)=\widetilde{\nabla}_{f_*X}f_*Y-f_*\nabla_XY, \tag{2.7.3}$$

$$D^3f:\ \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(N),$$
$$D^3f(X,Y,Z)=\widetilde{\nabla}_{f_*X}D^2f(Y,Z)-D^2f(Y,\nabla_XZ)-D^2f(\nabla_XY,Z). \tag{2.7.4}$$

显然有

$$D^2f(Y,X)=D^2f(X,Y)$$

及

$$D^3f(X,Y,Z)=D^3f(X,Z,Y). \tag{2.7.5}$$

即 D^2f 为对 X、Y 双线性及对称;D^3f 为对 X、Y、Z 三线性,且对 Y、Z 对称.

由于 $f:M\to N$ 为浸入,即局部双全纯,故对每一点 $z\in M$,存在 z 的一个邻域 U_z,使得 f 在 U_z 上为嵌入(injective),即一对一,f^{-1}在 U_z 上为全纯.以 f^{-1}表示 f 在 U_z 上的逆映照,f_*^{-1}表示 f^{-1} 在 U_z 上的微分.

于是可以定义全纯浸入 $f:M\to N$ 的 Schwarz 导数 Sf_z 为：

$$Sf=Sf_z:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M),$$

$$\begin{aligned}Sf(X,Y)&=Sf_z(X,Y)\\&=\langle X,Y\rangle_M f_*^{-1}D^3f(X,X,X)\\&\quad-\frac{3}{2}\langle f_*^{-1}D^2f(X,X),Y\rangle_M f_*^{-1}D^2f(X,X),\end{aligned}\qquad(2.7.6)$$

这里 $\langle,\rangle_M$ 表示 M 上的内积，由此定义可见 $Sf_z(X,Y)$ 对 Y 是线性的.

若 $M=N=\mathbf{C}^n$，M、N 取欧氏距离，令

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i},\quad Y=\eta^i\frac{\partial}{\partial z^i},$$

则(2.7.6)成为

$$\begin{aligned}2Sf_z(X,Y)=&\ \xi^i\overline{\eta}^i\xi^j\xi^k\xi^l\frac{\partial^3w^\alpha}{\partial z^j\partial z^k\partial z^l}\cdot\frac{\partial z^m}{\partial w^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial z^m}\\&-\frac{3}{2}\xi^i\xi^j\frac{\partial^2w^\alpha}{\partial z^i\partial z^j}\cdot\frac{\partial z^k}{\partial w^\alpha}\overline{\eta}^k\\&\times\xi^l\xi^m\frac{\partial^2w^\beta}{\partial z^l\partial z^m}\frac{\partial z^s}{\partial w^\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial z^s}.\end{aligned}\qquad(2.7.7)$$

当 $n=1$ 时，(2.7.7)成为

$$2Sf_z(X,Y)=\xi^4\overline{\eta}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)\frac{\partial}{\partial z},$$

这就是一个复变数的全纯函数的 Schwarz 导数乘以一个因子.

若 $M=B^n$，即 $\mathbf{C}^n$ 中的单位超球，其 Bergman 度量为

$$\mathrm{d}S_M^2=4\frac{(1-|z|^2)\delta_{ij}+\overline{z}^iz^j}{(1-|z|^2)^2}\mathrm{d}z^i\,\overline{\mathrm{d}z^j}.$$

而 $N=\mathbf{C}^n$，则 $f:M\to N$ 的 Schwarz 导数成为

$$\begin{aligned}Sf_z(X,Y)=&\ \langle X,Y\rangle_{B^n}\xi^i\xi^j\xi^k\frac{\partial^3w^\alpha}{\partial z^i\partial z^j\partial z^k}\cdot\frac{\partial z^l}{\partial w^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial z^l}\\&-\frac{3}{2}\xi^i\xi^j\frac{\partial^2w^\alpha}{\partial z^i\partial z^j}\cdot\frac{\partial z^l}{\partial w^\alpha}\overline{\eta}^r\left\langle\frac{\partial}{\partial z^l},\frac{\partial}{\partial z^r}\right\rangle_{B^n}\xi^k\xi^m\frac{\partial^2w^\beta}{\partial z^k\partial z^m}\\&\times\frac{\partial z^s}{\partial w^\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial z^s}-\frac{3\overline{\xi}^iz^i}{1-|z|^2}\left[\langle X,Y\rangle_{B^n}\xi^i\xi^j\frac{\partial^2w^\alpha}{\partial z^i\partial z^j}\cdot\frac{\partial z^k}{\partial w^\alpha}\right.\end{aligned}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z^k} - \xi^i \xi^j \frac{\partial^2 w^a}{\partial z^i \partial z^j} \cdot \frac{\partial z^l}{\partial w^a} \overline{\eta}^s \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial z^l}, \frac{\partial}{\partial z^s} \right\rangle_{B^n} X \Bigg]. \tag{2.7.8}$$

当 $n=1$时，(2.7.8)成为

$$Sf_z(X,Y) = \frac{2\xi^4 \overline{\eta}}{(1-|z|^2)^2} \left(\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

这也是一个复变数的全纯函数的 Schwarz 导数乘以一个因子.

在这一节中要证明如下两个定理：

定理2.7.1　若 M、N、H 为三个复维数是 n 的 Kähler 流形，$f:M\to N$，$g:N\to H$ 均为全纯浸入. 若

$$Sf_z(X,Y)=0,\ Sg_w(\widetilde{X},\widetilde{Y})=0$$

对所有的 $z\in M$，X、$Y\in\chi(M)$；$w\in N$，$\widetilde{X}$，$\widetilde{Y}\in\chi(N)$都成立，则对任意的 $z\in M$，X、$Y\in\chi(M)$. 有

$$Sg\circ f_z(X,Y)=0.$$

由定理2.7.1，可得：

系2.7.1　若 M 为 Kähler 流形，$\mathrm{Aut}(M)$为 M 的全纯自同构群，令

$\text{Möb}(M)=\{f\in \mathrm{Aut}(M): Sf_z(X,Y)\equiv 0$对所有 $z\in M$ 及所有 X、$Y\in\chi(M)\}$，

则 Möb(M)是 Aut(M)的一个子群.

定理2.7.2(双全纯判别准则)　若 M 为 n 维的完备Kähler流形，$\Omega\subseteq M$ 为一个凸域，其全纯截曲率有上界 K，Ω 的直径为 δ ($0<\delta\leqslant\infty$). 若 N 为 $\mathbf{C}^n$、$\mathbf{CP}^n$ 或 B^n ($\mathbf{C}^n$ 中的单位球)，f：$\Omega\to N$ 为全纯浸入，且

$$\Re e\left\{\frac{\langle Sf_z(X,Y),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2\langle X,Y\rangle}\right\}\leqslant \frac{4\pi^2}{\delta^2}-K+\frac{C\langle f_*X,f_*X\rangle}{2\langle X,X\rangle}$$

对所有的 $z\in\Omega$，X、$Y\in\chi(\Omega)$都成立，这里 C 为 N 的全纯截曲率，即分别为 0、+1及 −1，则 f 为嵌入，即双全纯.

下面给出定理2.7.1的证明：

若 M、N、H 为三个复维数为 n 的 Kähler 流形，∇、$\widetilde{\nabla}$、$\widetilde{\widetilde{\nabla}}$ 分别

为它们的(1,0)型联络，又若

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} H;$$
$$z \to w \to \zeta$$

为全纯浸入. 由定义(2.7.3)，若 $X、Y、Z \in \chi(M)$，则有

$$\begin{aligned} D^2 g \circ f(X,Y) &= \tilde{\tilde{\nabla}}_{g \circ f_* X} g \circ f_* Y - g \circ f_* \nabla_X Y \\ &= \tilde{\tilde{\nabla}}_{g \circ f_* X} g \circ f_* Y - g_* \tilde{\nabla}_{f_* X} f_* Y \\ &\quad + g_* \tilde{\nabla}_{f_* X} f_* Y - g_* (f_* \nabla_X Y) \\ &= D^2 g(f_* X, f_* Y) + g_* D^2 f(X,Y). \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

由(2.7.9)及(2.7.4)，可得

$$\begin{aligned} D^3 g \circ f(X,Y,Z) &= \tilde{\tilde{\nabla}}_{(g \circ f)_* X} D^2 g \circ f(Y,Z) \\ &\quad - D^2 g \circ f(Y, \nabla_X Z) - D^2 g \circ f(\nabla_X, Y, Z) \\ &= \tilde{\tilde{\nabla}}_{(g \circ f)_* X} (D^2 g(f_* Y, f_* Z) + g_* D^2 f(Y,Z)) \\ &\quad - D^2 g(f_* Y, f_* \nabla_X Z) - g_* D^2 f(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad - D^2 g(f_* \nabla_X Y, f_* Z) - g_* D^2 f(\nabla_X Y, Z) \\ &= \tilde{\tilde{\nabla}}_{(g \circ f)_* X} D^2 g(f_* Y, f_* Z) - D^2 g(f_* Y, \tilde{\nabla}_{f_* X} f_* Z) \\ &\quad - D^2 g(\nabla_{f_* X} f_* Y, f_* Z) + D^2 g(f_* Y, \tilde{\nabla}_{f_* X} f_* Z) \\ &\quad - D^2 g(f_* Y, f_* \nabla_X Z) + D^2 g(\tilde{\nabla}_{f_* X} f_* Y, f_* Z) \\ &\quad - D^2 g(f_* \nabla_X Y, f_* Z) + \tilde{\tilde{\nabla}}_{g_* f_* X} g_* D^2 f(Y,Z) \\ &\quad - g_* D^2 f(Y, \nabla_X, Z) - g_* D^2 f(\nabla_X Y, Z) \\ &= D^3 g(f_* X, f_* Y, f_* Z) + D^2 g(f_* Y, D^2 f(X,Z)) \\ &\quad + D^2 g(f_* Z, D^2 f(X,Y)) + \tilde{\tilde{\nabla}}_{g_* f_* X} g_* D^2 f(Y,Z) \\ &\quad - g_* \tilde{\nabla}_{f_* X} D^2 f(Y,Z) + g_* \tilde{\nabla}_{f_* X} D^2 f(Y,Z) \\ &\quad - g_* D^2 f(Y, \nabla_X, Z) - g_* D^2 f(\nabla_X, Y, Z) \\ &= D^3 g(f_* X, f_* Y, f_* Z) + D^2 g(f_* Y, D^2 f(X,Z)) \\ &\quad + D^2 g(f_* Z, D^2 f(X,Y)) \end{aligned}$$

$$+D^2g(f_*X,D^2f(Y,Z))+g_*\widetilde{\nabla}_{f_*X}D^2f(Y,Z)$$

$$-g_*D^2f(Y,\nabla_XZ)-g_*D^2f(\nabla_XY,Z)$$

$$=D^3g(f_*X,f_*Y,f_*Z)+g_*D^3f(X,Y,Z)$$

$$+D^2g(f_*X,D^2f(Y,Z))+D^2g(f_*Y,D^2f(Z,X))$$

$$+D^2g(f_*Z,D^2f(X,Y)). \tag{2.7.10}$$

将(2.6.9)及(2.6.10)代入到 $Sg\circ f_z$ 中，则得

$$Sg\circ f_z(X,Y)=\langle X,Y\rangle_M f_*^{-1}g_*^{-1}[D^3g(f_*X,f_*X,f_*X)$$

$$+g_*D^3f(X,X,X)+3D^2g(f_*X,D^2f(X,X))]$$

$$-\frac{3}{2}\langle f_*^{-1}g_*^{-1}[D^2g(f_*X,f_*X)+g_*D^2f(X,X)],Y\rangle$$

$$\times f_*^{-1}g_*^{-1}[D^2g(f_*X,f_*X)+g_*D^2f(X,X)]. \tag{2.7.11}$$

现在证明定理2.7.1：

固定 X，且令 $\langle X,Y\rangle_M=0$. 由于 $Sf_z(X,Y)=0$ 对任意 X、Y 都成立. 故

$$\langle f_*^{-1}D^2f(X,X),Y\rangle_M=0.$$

因此有

$$D^2f(X,X)=af_*X, \tag{2.7.12}$$

这里 a 为一个与 z 及 X 有关的复值函数.

由(2.7.12)，对任意 $Y\in\chi(M)$，有

$$\langle f_*^{-1}D^2f(X,X),Y\rangle_M f_*^{-1}D^2f(X,X)=\langle X,Y\rangle_M a^2X. \tag{2.7.13}$$

由假设

$$0=Sf_z(X,Y)=\langle X,Y\rangle_M f_*^{-1}D^3f(X,X,X)$$

$$-\frac{3}{2}\langle f_*^{-1}D^2f(X,X),Y\rangle f_*^{-1}D^2f(X,X).$$

由(2.7.13)得到

$$f_*^{-1}D^2f(X,X,X)=\frac{3}{2}a^2X. \tag{2.7.14}$$

同样可得

$$D^2g(f_*X,f_*X)=bg_*f_*X \qquad (2.7.15)$$

及

$$g_*^{-1}D^3g(f_*X,f_*X,f_*X)=\frac{3}{2}b^2f_*X. \qquad (2.7.16)$$

将(2.7.12)、(2.7.13)、(2.7.14)、(2.7.15)及(2.7.16)代入到(2.7.11)中，就得

$$\begin{aligned}Sg\circ f_z(X,Y)=&\langle X,Y\rangle\left[\frac{3}{2}b^2X+\frac{3}{2}a^2X+3f_*^{-1}g_*^{-1}D^2g(f_*X,af_*X)\right]\\&-\frac{3}{2}\langle(a+b)X,Y\rangle(a+b)X\\=&\langle X,Y\rangle\left[\frac{3}{2}(a^2+b^2)X+3af_*^{-1}g_*^{-1}D^2g(f_*X,f_*X)\right.\\&\left.-\frac{3}{2}(a+b)^2X\right]\\=&\langle X,Y\rangle\left[\frac{3}{2}(a^2+b^2)+3ab-\frac{3}{2}(a+b)^2\right]X=0.\end{aligned}$$

这就完全证明了定理2.7.1.

为了证明系2.7.1，这只要证明 $f^{-1}\in\mathrm{Möb}(M)$. 由(2.6.1)，可得：

$$\begin{aligned}0=&D^2f^{-1}\circ f(X,X)=D^2f^{-1}(f_*X,f_*X)+f_*^{-1}D^2f(X,X)\\=&D^2f^{-1}(f_*X,f_*X)+f_*^{-1}af_*X\\=&D^2f^{-1}(f_*X,f_*X)+aX,\end{aligned}$$

因此

$$D^2f^{-1}(f_*X,f_*X)=-aX.$$

由(2.7.10)、(2.7.14)及上式，得到

$$\begin{aligned}0=&D^3f^{-1}\circ f^{-1}(X,X,X)\\=&D^3f^{-1}(f_*X,f_*X,f_*X)+f_*^{-1}D^3f(X,X,X)\\&+3D^2f^{-1}(f_*X,D^2f(X,X))\\=&D^3f^{-1}(f_*X,f_*X,f_*X)+\frac{3}{2}a^2X+3D^2f^{-1}(f_*X,af_*X)\end{aligned}$$

$$= D^3 f^{-1}(f_* X, f_* X, f_* X) + \frac{3}{2}a^2 X - 3a^2 X,$$

此即

$$D^3 f^{-1}(f_* X, f_* X, f_* X) = \frac{3}{2}a^2 X.$$

将这些结果代入 Sf_z^{-1} 的表达式，得到

$$Sf_z^{-1}(X,Y) = 0.$$

这就证明了系2.7.1.

为了证明定理2.7.2，要证明以下两条引理：

令

$$dS_M^2 = 2g_{i\bar{j}} \cdot dz^i \overline{dz^j},$$
$$dS_N^2 = 2\widetilde{g}_{i\bar{j}} \cdot dz^i \overline{dz^j}.$$

引理2.7.1　若 M、N 为同维数的Kähler流形，$f: M \to N$ 为全纯浸入，对于每个 $z \in M$ 及任意的 $X, Y \in \chi(M)$，$\Re \dfrac{\langle Sf_z(X,Y), X\rangle}{\langle X,X\rangle^2 \langle X,Y\rangle}$ 局部一致有界，则一定存在一个只与 X 有关的定义在 z 的邻域的 C^∞ 复值函数 a，使得

$$D^3 f(X,X) = a f_* X. \tag{2.7.17}$$

证　固定 X，令 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为(1,0)向量内积空间的正交基，且 $X_1 = \dfrac{X}{|X|}$，则

$$f_*^{-1} D^2 f(X,X) = a^\alpha X_\alpha.$$

令

$$Y_k = \frac{1}{k}X_1 - \bar{a}^1\Big(\sum_{\alpha=2}^{n} \bar{a}^\alpha X_\alpha\Big).$$

如果用记号 $\langle , \rangle$ 表示 $\langle , \rangle_M$，则

$$\Re \frac{\langle Sf_z(X,Y_k), X\rangle}{\langle X,X\rangle^2 \langle X,Y_k\rangle} = \Re\left\{\frac{1}{\langle X,X\rangle^2}\langle f_*^{-1}D^3 f(X,X,X), X\rangle\right\}$$
$$- \frac{3}{2}\Re\left\{\frac{k}{\langle X,X\rangle^2}\Big(\frac{a^1}{k} - \bar{a}^1 \sum_{\alpha=2}^{n} |\bar{a}^\alpha|^2\Big) a^1\right\}$$
$$= \Re\left\{\frac{1}{\langle X,X\rangle^2}\langle f_*^{-1}D^3 f(X,X,X), X\rangle\right\}$$

$$-\frac{3}{2}\Re e\left\{\frac{(a^1)^2}{\langle X,X\rangle^2}-\frac{k}{\langle X,X\rangle^2}|a^1|^2\sum_{\alpha=2}^{n}|a^\alpha|^2\right\}.$$

于是可得 $a^2,a^3,\cdots,a^n$ 均为零. 若不然，令 $k\to\infty$，则上式右端→∞. 这与假设相矛盾.

引理2.7.2 若 M 为 n 维 Kähler 流形，N 为 n 维常全纯截曲率（$=C$）的 Kähler 流形. $\gamma(t)$ 为 M 上的正则测地线，$X_0=\gamma_*\frac{\partial}{\partial t}$ 为其实切向量，且 $X=X_0-iJX_0$，$\overline{X}=X_0+iJX_0$，J 为 M 的复结构，若 $f:M\to N$ 为全纯浸入，且满足引理2.7.1中局部一致有界的假设，则对每一个 $Y\in\chi(M)$，有

$$\frac{\langle Sf_x(X,Y),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2\langle \overline{X},Y\rangle}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\frac{a^2}{2}\right)+C\frac{\langle f_*X,f_*X\rangle}{\langle X,X\rangle}$$
$$-\frac{R^M(X,JX,X,JX)}{\langle X,X\rangle^2},\tag{2.7.18}$$

其中 a 由(2.7.11)所定义，R^M 为 M 的曲率算子.

证 由(2.7.6)、(2.7.4)及(2.7.17)可得到：

$$Sf_x(X,Y)=\langle X,Y\rangle f_*^{-1}[\widetilde{\nabla}_{f_*X}D^2f(X,X)-2D^2f(X,\nabla_XX)]$$
$$-\frac{3}{2}a^2\langle X,Y\rangle X.$$

而由(2.7.3)及(2.7.17)，有

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{f_*X}D^2f(X,X)&-f_*\nabla_Xf_*^{-1}D^2f(X,X)\\&=D^2f(X,f_*^{-1}D^2f(X,X))\\&=D^2f(X,f_*^{-1}af_*X)\\&=aD^2f(X,X)\\&=a^2f_*X,\end{aligned}$$

代入上式，即得

$$Sf_x(X,Y)=\langle X,Y\rangle\left\{-\frac{a^2}{2}X+\nabla_Xf_*^{-1}D^2f(X,X)\right.$$
$$\left.-2f_*^{-1}D^2f(X,\nabla_XX)\right\}$$

$$= \langle X,Y\rangle\left\{-\frac{a^2}{2}X + \nabla_{\overline{X}}aX - 2f_*^{-1}D^2f(X,\nabla_{\overline{X}}X)\right\}$$

$$= \langle X,Y\rangle\left\{\left(\overline{X}a-\frac{a^2}{2}\right)X+a\nabla_{\overline{X}}X-2f_*^{-1}D^2f(X,\nabla_{\overline{X}}X)\right\}.$$

(2. 7. 19)

由于 $\gamma(t)$ 为正则测地线，

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = X_0a = \frac{1}{2}(X+\overline{X})a = \frac{1}{2}Xa + \frac{1}{2}\overline{X}a,$$

所以 $Xa=2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\overline{X}a$，代入(2. 6. 19)，就有

$$\frac{\langle Sf_\gamma(X,Y),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2\langle X,Y\rangle}=\frac{\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\overline{X}a-\frac{a^2}{2}\right)}{\langle X,X\rangle}+\frac{\langle a\nabla_{\overline{X}}X,X\rangle}{\langle X,X\rangle^2}$$

$$-\frac{\langle 2f_*^{-1}D^2f(X,\nabla_{\overline{X}}X),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2}. \quad (2.7.20)$$

由于 $\gamma(t)$ 为正则测地线，即 $\nabla_{X_0}X_0=0$. 因此

$$0=\nabla_{X_0}X_0=\frac{1}{4}\nabla_{X+\overline{X}}(X+\overline{X})$$

$$=\frac{1}{4}(\nabla_XX+\nabla_{\overline{X}}X+\nabla_X\overline{X}+\nabla_{\overline{X}}\overline{X}).$$

由于 $\nabla_XX+\nabla_{\overline{X}}X$ 是 (1,0) 型向量，$\nabla_X\overline{X}+\nabla_{\overline{X}}\overline{X}$ 是(0,1)型向量，所以

$$\nabla_{\overline{X}}X=-\nabla_XX. \quad (2.7.21)$$

利用局部坐标计算，令 $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i}$，对 $aX=f_*^{-1}D^2f(X,X)$ 两端对 $\overline{X}$ 求协变导数. 根据(2. 7. 21)，一方面：

$$\nabla_{\overline{X}}aX=(\overline{X}a)X+a\nabla_{\overline{X}}X=(\overline{X}a)X-a\nabla_XX.$$

(2. 7. 22)

而另一方面：

$$\nabla_{\overline{X}}f_*^{-1}D^2f(X,X)=\nabla_{\overline{X}}f_*^{-1}D^2f\left(\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i},\xi^k\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$$

$$=\nabla_{\overline{X}}\xi^i\xi^kf_*^{-1}D^2f\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$$

$$= (\overline{X}\xi^i\xi^k)f_*^{-1}D^2\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$$

$$+\ \xi^i\xi^k\nabla_{\overline{X}}f_*^{-1}D^2f\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k}\right).$$

由于∇是(1,0)型联络,因此,

$$(\overline{X}\xi^i\xi^k)f_*^{-1}D^2f\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k}\right)=2\xi^i(\overline{X}\xi^k)f_*^{-1}D^2f\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$$

$$=2f_*^{-1}D^2f\left(\xi^i\frac{\partial}{\partial z},(\overline{X}\xi^k)\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$$

$$=2f_*^{-1}D^2f(\overline{X},\nabla_{\overline{X}}X)$$

$$=-2f_*^{-1}D^2f(X,\nabla_{\overline{X}}X).$$

将此式代入上式,而与(2.7.22)相比较,就有

$$(\overline{X}a)X-a\nabla_{\overline{X}}X$$

$$=\xi^i\xi^k\nabla_{\overline{X}}f_*^{-1}D^2f\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k}\right)-2f_*^{-1}D^2f(X,\nabla_{\overline{X}}X). \tag{2.7.23}$$

此外,根据(2.7.3),有

$$\xi^i\xi^k\nabla_{\overline{X}}f_*^{-1}D^2f\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$$

$$=\xi^i\xi^k\nabla_{\overline{\xi}^j\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}}f_*^{-1}\left[\widetilde{\nabla}_{f_*\frac{\partial}{\partial z^i}}f_*\frac{\partial}{\partial z^k}-f_*\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\frac{\partial}{\partial z^k}\right]$$

$$=\xi^i\overline{\xi}^j\xi^k\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}}\left[f_*^{-1}\frac{\partial^2 w^\gamma}{\partial z^i\partial z^k}\cdot\frac{\partial}{\partial w^\gamma}\right.$$

$$\left.+f_*^{-1}\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial w^\gamma}{\partial z^k}\nabla_{\frac{\partial}{\partial w^\gamma}}\frac{\partial}{\partial w^\gamma}-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial z^l}\right]$$

$$=\xi^i\overline{\xi}^j\xi^k\left[\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial w^\gamma}{\partial z^k}\cdot\frac{\partial \widetilde{\Gamma}^\delta_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{w}^\beta}\cdot\frac{\partial \overline{w}^\beta}{\partial \overline{z}^j}\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial z^l}{\partial w^\gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial z^l}-\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial \overline{z}^j}\cdot\frac{\partial}{\partial z^l}\right]$$

$$=\xi^i\overline{\xi}^j\xi^k\left[S^l_{ik\overline{j}}\cdot\frac{\partial}{\partial z^l}-\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial w^\gamma}{\partial z^k}\cdot\frac{\partial \overline{w}^\beta}{\partial \overline{z}^j}\right.$$

$$\times \widetilde{S}^{\delta}_{\alpha\gamma\bar\beta} \frac{\partial z^l}{\partial w^\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial z^l}\Bigg],$$

这里 $S^l_{ik\bar j}$，$\widetilde{S}^\delta_{\alpha\gamma\bar\beta}$分别为 M、N 的曲率张量.

由于 N 是具有常全纯截曲率 C 的 Kähler 流形，因此，

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^\delta_{\alpha\gamma\bar\beta} &= \tilde{g}^{\bar\mu\delta}\,\widetilde{S}_{\alpha\bar\mu\gamma\bar\beta} = \frac{C}{2}\,\tilde{g}^{\bar\mu\delta}(\tilde{g}_{\alpha\bar\mu}\,\tilde{g}_{\gamma\bar\beta}+\tilde{g}_{\alpha\bar\beta}\,\tilde{g}_{\gamma\bar\mu}) \\ &= \frac{C}{2}(\delta_{\alpha\delta}\,\tilde{g}_{\gamma\bar\beta}+\delta_{\gamma\delta}\,\tilde{g}_{\alpha\bar\beta}).\end{aligned}$$

代入上式，就有

$$\begin{aligned}\xi^i\xi^k\nabla_{\bar X} f_*^{-1}D^2 f\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^k}\right) &= \xi^i\bar\xi^j\xi^k S^l_{ik\bar j}\frac{\partial}{\partial z^l} - \frac{C}{2}\xi^i\bar\xi^j\xi^k\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial\bar w^\beta}{\partial\bar z^j} \\ &\quad\times\frac{\partial w^\gamma}{\partial z^k}(\delta_{\alpha\delta}\,\tilde{g}_{\gamma\bar\beta}+\delta_{\gamma\delta}\,\tilde{g}_{\alpha\bar\beta})\frac{\partial z^l}{\partial w^\delta}\frac{\partial}{\partial z^l} \\ &= \xi^i\bar\xi^j\xi^k S^l_{ik\bar j}\cdot\frac{\partial}{\partial z^l} \\ &\quad - C\xi^k\frac{\partial w^\gamma}{\partial z^k}\bar\xi^j\frac{\partial\bar w^\beta}{\partial\bar z^j}\tilde{g}_{\gamma\bar\beta}\xi^l\frac{\partial}{\partial z^l} \\ &= \xi^i\bar\xi^j\xi^k S^l_{ik\bar j}\frac{\partial}{\partial z^l} - C\langle f_*X,f_*X\rangle X.\end{aligned}$$

将上式代入(2.7.23)，并与 X 作内积，就得到

$$\begin{aligned}\langle(\bar X a)X - a\nabla_X X, X\rangle &= \xi^i\bar\xi^j\xi^k\bar\xi^l S_{i\bar jk\bar l} - C\langle f_*X,f_*X\rangle\langle X,X\rangle \\ &\quad - 2\langle f_*^{-1}D^2 f(X,\nabla_X X),X\rangle,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}(\bar X a)\langle X,X\rangle &= \xi^i\bar\xi^j\xi^k\bar\xi^l S_{i\bar jk\bar l} - C\langle f_*X,f_*X\rangle\langle X,X\rangle \\ &\quad + a\langle\nabla_X X,X\rangle - 2\langle f_*^{-1}D^2 f(X,\nabla_X X),X\rangle.\end{aligned}\tag{2.7.24}$$

由于 $\gamma(t)$是正则测地线，$\langle X_0,X_0\rangle=1$，于是

$$\begin{aligned}1 = \frac{1}{4}\langle X+\bar X, X+\bar X\rangle &= \frac{1}{4}\langle X,X\rangle + \frac{1}{4}\langle\bar X,\bar X\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle X,X\rangle,\end{aligned}$$

故 $\langle X,X\rangle=2$，将此式及(2.7.24)代入(2.7.20)就有

$$\frac{\langle Sf_*(X,Y),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2\langle X,Y\rangle}=\frac{2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\frac{a^2}{2}}{\langle X,X\rangle}-\frac{\xi^i\bar{\xi}^j\xi^k\bar{\xi}^l S_{i\bar{j}k\bar{l}}-C\langle f_*X,f_*X\rangle\langle X,X\rangle}{\langle X,X\rangle^2}$$

$$-\frac{a\langle\nabla_X X,X\rangle-2\langle f_*^{-1}D^2f(X,\nabla_X X),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2}$$

$$+\frac{a\langle\nabla_X X,X\rangle}{\langle X,X\rangle^2}-\frac{2\langle f_*^{-1}D^2f(X,\nabla_X X),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\frac{a^2}{2}\right)-\frac{R^M(X,JX,X,JX)}{\langle X,X\rangle^2}$$

$$+C\frac{\langle f_*X,f_*X\rangle}{\langle X,X\rangle},$$

这里 $R^M(X,JX,X,JX)=\xi^i\bar{\xi}^j\xi^k\bar{\xi}^l S_{i\bar{j}k\bar{l}}$，$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i}$.

这就证明了引理2.7.2.

现在来证明定理2.7.2.

若 f 不是嵌入，则在 Ω 中存在两点 z_1、$z_2(z_1\neq z_2)$，而 $f(z_1)=f(z_2)$. 令 $\gamma:[0,T]\to M$ 为正则测地线，且 $\gamma(0)=z_1$，$\gamma(T)=z_2$. 取 τ 为定义在 $f\circ\gamma(t)$ 的邻域的任一全纯函数，$h=\tau(f(z))-\tau(f(z_1))$，则 $h(t)=h\circ f\circ\gamma(t)$，显然 $h(0)=h(T)=0$，且

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=X_0h=\frac{1}{2}(X+\bar{X})h=\frac{1}{2}xh, \tag{2.7.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=X_0(X_0h)=\frac{1}{2}(X+\bar{X})\left(\frac{1}{2}xh\right)$$

$$=\frac{1}{4}[X(Xh)+\bar{X}(Xh)], \tag{2.7.26}$$

这里 $X_0=\gamma_*\frac{\partial}{\partial t}$，$X=X_0-iJX_0$，$\bar{X}=X_0+iJX_0$，式中 J 是 M 的复结构.

若 $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i}$，$U$ 是 $f(\gamma)$ 所在的坐标邻域，其非齐次坐标为 $(w^1,w^2,\cdots,w^n)$，于是由(2.7.21)，有

$$D^2f(X,X)h=(\nabla_{f_*X}f_*X-f_*\nabla_X X)h$$

$$=(\nabla_{f_*X}f_*X+f_*\nabla_{\bar{X}}X)h$$

$$= X(Xh) + \xi^i\xi^j \frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial w^\beta}{\partial z^j}\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial h}{\partial w^\gamma} + \overline{X}(Xh). \tag{2.7.27}$$

这里$\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$为$N$的联络系数.

比较(2.7.26)及(2.7.27),就得到

$$D^2f(X,X)h = 4\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} + \xi^i\xi^j\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial w^\beta}{\partial z^j}\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial h}{\partial w^\gamma}.$$

由(2.7.17)及(2.7.25),就有$D^2f(X,X)h=2a\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$,代入上式就有

$$2a\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - 4\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = \xi^i\xi^j\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial w^\beta}{\partial z^j}\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial h}{\partial w^\gamma}. \tag{2.7.28}$$

由于N是$\mathbf{C}^n$、$\mathbf{CP}^n$或B^n,故只要分别按这三种情形来进行讨论即可.

(i) 当$N=\mathbf{C}^n$,则$C=0$,而$\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}=0$;

(ii) 当$N=\mathbf{CP}^n$,则$C=+1$,而$\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}=\dfrac{-(\overline{w}^\beta\delta_{\gamma\alpha}+\overline{w}^\alpha\delta_{\gamma\beta})}{1+\sum\limits_\alpha w^\alpha\overline{w}^\alpha}$;

(iii) 当$N=B^n$,则$C=-1$,而

$$\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = (\overline{w}^\beta\delta_{\gamma\alpha} + \overline{w}^\alpha\delta_{\gamma\beta})\Big(1-\sum_\alpha w^\alpha\overline{w}^\alpha\Big)^{-1}.$$

下面注视(2.7.28)继续分三种情形来讨论:

(i) 当$N=\mathbf{C}^n$,则(2.7.28)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{2}a\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0.$$

令 $v=h\exp\left\{-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right\}$,上式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{8}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}a^2\right)h = 0.$$

由定理假设及引理2.7.2,有

$$\frac{4\pi^2}{\delta^2} - K \geqslant \Re e\frac{\langle Sf_z(X,Y),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2\langle X,Y\rangle} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2}\right) - \frac{R^M(X,JX,X,JX)}{\langle X,X\rangle^2} \geqslant \frac{1}{2}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2}\right) - K.$$

因此,

$$\frac{4\pi^2}{\delta^2} \geqslant \frac{1}{2}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2}\right).$$

显然 $u=\sin\frac{\varepsilon+t}{T+2\varepsilon}\pi$，$t\in[0,T]$是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\pi^2}{(T+2\varepsilon)^2}u = 0$$

的解，且当$t\in[0,T]$时，$u>0$.

由于$T<\delta$,可取ε充分小,使得$T+2\varepsilon<\delta$，因此

$$\frac{\pi^2}{(T+2\varepsilon)^2} > \frac{\pi^2}{\delta^2} \geqslant \frac{1}{8}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2}\right).$$

于是可以证明：$v\equiv$常数[2.12]，而$v=he^{-\frac{1}{4}\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}$，$h$是任意全纯函数，故$f\circ\gamma(t)\equiv$常数，当$t\in[0,T]$，即当$t\in[0,T]$时，$f\circ\gamma(t)$是一个点. 这与$f$是浸入的相矛盾. 这就证明了定理2.7.2在(i)的情形.

(ii) 当$N=\mathbf{CP}^n$，则(2.7.28)成为

$$2a\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - 4\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2(X\rho^2)}{1+\rho^2}Xh = -\frac{4(X\rho^2)}{1+\rho^2}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

这里 $\rho^2=\sum_{\alpha=1}^{n}w^\alpha\overline{w^\alpha}$, 上式即为

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{2}\left(a + \frac{2(X\rho^2)}{1+\rho^2}\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0.$$

令 $b=a+\frac{2(X\rho^2)}{1+\rho^2}$，则上式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} - \frac{b}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0.$$

令$v=he^{-\frac{1}{4}\int_0^t b(s)\mathrm{d}s}$，则上式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{8}\left(2\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - \frac{b^2}{2}\right)v = 0, \tag{2.7.29}$$

而

$$2\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - \frac{b^2}{2} = 2\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{2\frac{\mathrm{d}\rho^2}{\mathrm{d}t}(X\rho^2)}{(1+\rho^2)^2} + \frac{2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X\rho^2)}{1+\rho^2}\right] - \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{4(X\rho^2)^2}{(1+\rho^2)^2} + \frac{4aX\rho^2}{1+\rho^2}\right)$$

$$= 2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2} - \frac{2(X+\overline{X})\rho^2(X\rho^2)}{(1+\rho^2)^2} + \frac{2(X+\overline{X})X\rho^2}{1+\rho^2}$$

$$- \frac{2(X\rho^2)^2}{(1+\rho^2)^2} - \frac{2f_*^{-1}D^2f(X,X)\rho^2}{1+\rho^2}$$

$$= 2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2} - \frac{4(X\rho^2)^2 + 2(\overline{X}\rho^2)(X\rho^2)}{(1+\rho^2)^2}$$

$$+ \frac{2X(X\rho^2) + 2\overline{X}(X\rho^2)}{1+\rho^2} - \frac{2f_*^{-1}D^2f(X,X)\rho^2}{1+\rho^2}. \tag{2.7.30}$$

现在计算 $D^2f(X,X)\rho^2$：

$$D^2f(X,X)\rho^2 = (\widetilde{\nabla}_{f_*X}f_*X - f_*\nabla_XX)\rho^2$$

$$= (\widetilde{\nabla}_{f_*X}f_*X + f_*\nabla_{\overline{X}}X)\rho^2$$

$$= (\widetilde{\nabla}_{f_*X}f_*X)\rho^2 + \overline{X}(X\rho^2) - \xi^i\overline{\xi}^j\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial \overline{w}^\beta}{\partial \overline{z}^j}\delta_{\alpha\beta}$$

$$= X(X\rho^2) + \xi^i\xi^k\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial w^\gamma}{\partial z^k}\widetilde{\Gamma}^\beta_{\alpha\beta}\overline{w}^\beta$$

$$+ \overline{X}(X\rho^2) - \xi^i\overline{\xi}^j\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial \overline{w}^\beta}{\partial \overline{z}^j}\delta_{\alpha\beta}$$

$$= X(X\rho^2) - \xi^i\xi^k\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial w^\gamma}{\partial z^k}\cdot\frac{\overline{w}^\gamma\delta_{\alpha\beta} + \overline{w}^\alpha\delta_{\alpha\beta}}{1+\rho^2}\overline{w}^\beta$$

$$+ \overline{X}(X\rho^2) - \xi^i\overline{\xi}^j\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial \overline{w}^\beta}{\partial \overline{z}^j}\delta_{\alpha\beta}$$

$$= X(X\rho^2) - \frac{2(X\rho^2)^2}{1+\rho^2} + \overline{X}(X\rho^2)$$

$$- \xi^i\overline{\xi}^j\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial \overline{w}^\beta}{\partial \overline{z}^j}\delta_{\alpha\beta}. \tag{2.7.31}$$

另一方面，由于 $\mathbf{CP}^n$ 的度量为：

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}w^\alpha\mathrm{d}\overline{w}^\beta$$

$$= 4\frac{(1+\rho^2)\delta_{\alpha\beta} - w^\alpha\overline{w}^\beta}{(1+\rho^2)^2}\mathrm{d}w^\alpha\,\overline{\mathrm{d}w}^\beta,$$

$$\langle f_*X, f_*X\rangle = \xi^i\overline{\xi}^j\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial \overline{w}^\beta}{\partial \overline{z}^j}g_{\alpha\beta}$$

$$= 4\xi^i\bar{\xi}^j \frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial \overline{w}^\beta}{\partial \bar{z}^j} \frac{(1+\rho^2)\delta_{\alpha\beta} - \overline{w}^\alpha w^\beta}{(1+\rho^2)^2}$$

$$= \frac{4}{1+\rho^2}\xi^i\bar{\xi}^j \frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial \overline{w}^\beta}{\partial \bar{z}^j}\delta_{\alpha\beta} - \frac{4}{(1+\rho^2)^2}(X\rho^2)(\overline{X}\rho^2).$$

将上式代入(2.7.31)，则得

$$D^2 f(X,X)\rho^2 = X(X\rho^2) + \overline{X}(X\rho^2) - \frac{2(X\rho^2)^2}{1+\rho^2}$$
$$- \frac{1+\rho^2}{4}\langle f_* X, f_* X\rangle - \frac{(X\rho^2)(\overline{X}\rho^2)}{1+\rho^2}.$$

将上式代入(2.7.30),得到

$$2\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - \frac{b^2}{2} = 2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\langle f_* X, f_* X\rangle.$$

将上式代入(2.7.29),得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{8}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\langle f_* X, f_* X\rangle\right)v = 0.$$

由定理的假设与引理 2.7.2 及 $C=+1$,有

$$\frac{4\pi^2}{\delta^2} - K + \frac{\langle f_* X, f_* X\rangle}{2\langle X,X\rangle} \geqslant \mathfrak{Re}\,\frac{\langle Sf_*(X,X),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2\langle X,Y\rangle} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2}\right)$$
$$+ \frac{\langle f_* X, f_* X\rangle}{\langle X,X\rangle} - \frac{R^M(X,JX,X,JX)}{\langle X,X\rangle^2}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{\langle f_* X, f_* X\rangle}{\langle X,X\rangle} - K.$$

因此

$$\frac{4\pi^2}{\delta^2} \geqslant \frac{1}{2}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{\langle f_* X, f_* X\rangle}{2\langle X,X\rangle}.$$

由于$\langle X,X\rangle=2$，故上式即为

$$\frac{\pi^2}{\delta^2} \geqslant \frac{1}{8}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\langle f_* X, f_* X\rangle\right).$$

显然 $u=\sin\frac{\varepsilon+t}{T+2\varepsilon}\pi$，$t\in[0,T]$是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\pi^2}{(T+2\varepsilon)^2}u = 0$$

的解，且当$t\in[0,T]$时，$u>0$.

由于 $T<\delta$，可取 ε 充分小，使得 $T+2\varepsilon<\delta$.
因此

$$\frac{\pi^2}{(T+2\varepsilon)^2}>\frac{\pi^2}{\delta^2}\geqslant\frac{1}{8}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}\langle f_*X,f_*X\rangle\right).$$

于是可以证明：$v\equiv$常数[2.12]，因此，如同(i)中所进行的那样，得到与 f 是浸入相矛盾的结果. 这就证明了定理2.7.2在(ii)的情形.

(iii) 当 $N=B^n$，则(2.7.28)成为

$$2a\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-4\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=\frac{2(X\rho^2)}{1-\rho^2}Xh=\frac{4(X\rho^2)}{1-\rho^2}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}\left(a-\frac{2(X\rho^2)}{1-\rho^2}\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=0.$$

令 $b=a-\dfrac{2(X\rho^2)}{1-\rho^2}$，则上式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}-\frac{b}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=0.$$

令 $v=he^{-\frac{1}{4}\int_0^t b(s)\mathrm{d}s}$，则上式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{8}\left(2\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}-\frac{b^2}{2}\right)v=0. \qquad (2.7.32)$$

如同(ii)中那样，具体计算 $2\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}-\dfrac{b^2}{2}$ 和 $D^2f(X,X)\rho^2$，可得

$$2\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}-\frac{b^2}{2}=2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\frac{a^2}{2}-\frac{4(X\rho^2)^2+2(\overline{X}\rho^2)(X\rho^2)}{(1-\rho^2)^2}$$
$$-\frac{2X(X\rho^2)+2\overline{X}(X\rho^2)}{1-\rho^2}+\frac{2D^2f(X,X)\rho^2}{1-\rho^2},$$

$$D^2f(X,X)\rho^2=X(X\rho^2)+\overline{X}(X\rho^2)+\frac{2(X\rho^2)^2}{1-\rho^2}$$
$$+\xi^i\xi^j\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial\overline{w}^\beta}{\partial\overline{z}^j}\delta_{\alpha\beta}.$$

另一方面，可得

$$\xi^i\xi^j\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial\overline{w}^\beta}{\partial\overline{z}^j}\delta_{\alpha\beta}=\frac{1-\rho^2}{4}\langle f_*X,f_*X\rangle-\frac{(X\rho^2)(\overline{X}\rho^2)}{1-\rho^2}.$$

因此

$$D^2f(X,X)\rho^2=X(X\rho^2)+\overline{X}(X\rho^2)+\frac{2(X\rho^2)}{1-\rho^2}$$

$$-\frac{1-\rho^2}{4}\langle f_*X,f_*X\rangle+\frac{(X\rho^2)(\overline{X}\rho^2)}{1-\rho^2}.$$

如同(ii)中那样,可得

$$2\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}-\frac{b^2}{2}=2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\langle f_*X,f_*X\rangle.$$

将上式代入(2.7.32),就有

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{8}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\langle f_*X,f_*X\rangle\right)=0.$$

如同(ii)中那样,由定理的假设、引理2.7.2以及 $C=-1$,可得

$$\frac{4\pi^2}{8^2}\geqslant\frac{1}{2}\left(2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}-\frac{a^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\langle f_*X,f_*X\rangle}{\langle X,X\rangle}.$$

如同(ii)中那样继续进行,就可证明定理2.7.2在(iii)的情形也是成立的.

综合以上,就证明了定理2.7.2.

特别是:当 $n=1$ 时,取 $N=C$, M 为 C 中的单位圆,对单位圆取三种不同的度量,即可得§2.1中的三种不同的 Nehari 判别准则(即系2.7.2).

系2.7.2 若 $f:\Delta=\{z\in C:|z|<1\}\to\mathbf{C}$, f 为局部双全纯.若不等式

(1) $\Re e\left\{\frac{\xi^2}{|\xi|^2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)\right\}\leqslant\frac{\pi^2}{2}$;或

(2) $\Re e\left\{\frac{\xi^2}{|\xi|^2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)\right\}\leqslant\frac{2}{(1-|z|^2)^2}$;或

(3) $\Re e\left\{\frac{\xi^2}{|\xi|^2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)\right\}\leqslant\frac{6}{(1+|z|^2)^2}$

成立,则 f 为双全纯.

证 (1) 在 Δ 中取欧氏度量,则 $K=0,\delta=2,\left\langle\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle=\frac{1}{2}$,故由定理2.7.2,若不等式

$$\Re e\left\{\frac{\langle Sf_z(X,Y),X\rangle}{\langle X,X\rangle^2\langle X,Y\rangle}\right\}=\Re e\left\{\frac{\frac{1}{4}\xi^3|\xi|\overline{\eta}}{\frac{1}{8}|\xi|^4\xi\overline{\eta}}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)\right\}\leqslant\frac{4\pi^2}{2}$$

成立，则 f 为嵌入，即为双全纯.

(2) 在 Δ 中取 Poincaré 度量，$ds^2=\dfrac{4dz\,\overline{dz}}{(1-|z|^2)^2}$，则 $\delta=\infty$，$K=-1$，以及 $\left\langle\dfrac{\partial}{\partial z},\dfrac{\partial}{\partial z}\right\rangle=\dfrac{2}{(1-|z|^2)^2}$，故由定理2.7.2，若不等式

$$\Re e\left\{\frac{\langle Sf_z(X,Y),X\rangle}{\langle X,X\rangle^4\langle X,Y\rangle}\right\}=\Re e\left\{\frac{\frac{4}{(1-|z|^2)^4}\xi^2|\xi|^2\bar{\eta}}{\frac{8}{(1-|z|^2)^6}|\xi|^4\xi\bar{\eta}}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)\right\}$$
$$\leqslant 1$$

成立，则 f 为嵌入，即为双全纯.

(3) 将 Δ 看成 CP 中的凸域，取球度量 $ds^2=\dfrac{4dz\,\overline{dz}}{(1+|z|^2)^2}$，则 $\delta=\pi$，$K=1$，以及 $\left\langle\dfrac{\partial}{\partial z},\dfrac{\partial}{\partial z}\right\rangle=\dfrac{2}{(1+|z|^2)^2}$，故由定理2.7.2，若不等式

$$\Re e\left\{\frac{\langle Sf_z(X,Y),X\rangle}{\langle X,X\rangle^4\langle X,Y\rangle}\right\}=\Re e\left\{\frac{4\xi^3|\xi|^2\bar{\eta}/(1+|z|^2)^4}{8|\xi|^4\xi\bar{\eta}/(1+|z|^2)^6}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)\right\}\leqslant 3$$

成立，则 f 为嵌入，即为双全纯.

显然系2.7.2也等价于下列的 Nehari 定理.

系2.7.3　设 f：$\Delta\to C$ 是局部双全纯. 若不等式

(1) $|\{f;z\}|\leqslant\dfrac{\pi^2}{2}$；或

(2) $|\{f;z\}|\leqslant\dfrac{2}{(1-|z|^2)^2}$；或

(3) $|\{f;z\}|\leqslant\dfrac{6}{(1+|z|^2)^2}$

成立，则 f 为双全纯.

这只要证明系2.7.2中的(1)、(2)、(3)与系2.7.3中的(1)、(2)、(3)分别相对应即可，实际上只要证明其中之一即可．例如情形(1).

显然,若系 2.7.3 中的 (1) 成立,则有

$$\Re e\left\{\frac{\xi^2}{|\xi|^2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)\right\}\leqslant\left|\frac{\xi^2}{|\xi|^2}\left(\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right)\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right|\leqslant\frac{\pi^2}{2}.$$

即系2.7.2中的(1)成立. 反之,若系2.7.2中的(1)成立,而系2.7.3中的 (1) 不成立,则存在点 z_0,使得 $\left|\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right|>\frac{\pi^2}{2}$ 成立.

在系2.7.2中的(1)中取 $\xi^2=\frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2$,则

$$\frac{\pi^2}{2}\geqslant\frac{\left|\frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2\right|^2}{\left|\frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2\right|}=\left|\frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2\right|.$$

这导致矛盾.

参 考 文 献

[2.1] Ahlfors L V. Möbius transformation in several dimensions. Ordway Professorship Lecture in Mathematics, University of Minnesota, 1981

[2.2] Ahlfors L V. Cross ratio and Schwarzian derivatives in $\mathbf{R}^n$. Complex Analysis, edited by Hersch J and Huber A, Basel. 1~15

[2.3] Birkhoff G and Rota G C. Ordinary Differential Equations. Ginn and Co, 1962

[2.4] Carathéodory C. Theory of functions, Vol I, II, Chelsea Publishing Co, 1964

[2.5] Carne K. The Schwarzian derivative for conformal maps. J. Reine Angew. Math, 1990, 408: 10~33

[2.6] Deligne P. Equations differentiables a points singuliers réguliers. Lecture Notes No 163, Springer-Verlag, 1970

[2.7] Flanders H. The Schwarzian as a curvature, J. Differential Geometry, 1970, 4: 515~519

[2.8] FitzGerald C H. and Gong S. The Schwarzian derivatives in several complex variables. Science in China, Series A, 1993, 36: 513~523

[2.9] Gao Weiqi. Schwarzian curvatures of holomorphic curves. Complex Variables, 1994, 25: 57~68

[2.10] Goluzin G M. Geometric theory of functions of a complex variable, Transl of Math Monograph, Vol 26, Aner Math Soc, 1969

[2.11] Gong S and Yu Qihuang. The Schwarzian derivative in C^n. Chinese J. of Contemporary Math, 1995, 16: 301~314

[2.12] 余其煌, 龚昇, C^n上的 Schwarz 导数. 数学年刊, 1995, 16A: 454~460

[2.13] Gong S and Yu Qihuang. The Schwarzian derivative in Kähler manifolds. Science in China, Series A, 1995, 38: 1033~1048

[2.14] 余其煌, 龚昇, Kähler 流形上的 Schwarz 导数. 中国科学, 1995, 25A: 693~704

[2.15] Gong S, Yu Qihuang and Na J S. The Schwarzian derivative in Kähler manifolds(Ⅱ), Science in China, Series A, 1997, 40: 30~36

[2.16] 余其煌, 那吉生, 龚昇, Kähler 流形上的 Schwarz 导数(Ⅱ), 中国科学, 1996, 26A: 793~798

[2.17] Gong S, Yu Qihuang and Zheng Xuean. The Schwarzian derivative in several complex variables (II), Chinese Annals of Math; 1998, 19B: 1~8

[2.18] Gong S, Zheng Xuean and Yu Qihuang. The Schwarzian derirative in several complex variables(Ⅲ), Science in China, Series A, 1998, 41: 158~171

[2.19] 龚昇, 郑学安, 余其煌. 多复变数的 Schwarz 导数(Ⅲ), 中国科学, 1997, 27: 975~987

[2.20] Gong S, Yu Qihuang and Zheng Xuean. The Schwarzian derivative in several complex variablex (Ⅳ), Science in China, Series A, 1998, 41

[2.21] 龚昇, 余其煌, 郑学安. 多复变数的 Schwarz 导数(Ⅳ), 中国科学, 1998, 28: 14~23

[2.22] 龚昇, 郑学安, 余其煌. 多复变数的 Schwarz 导数(Ⅴ), 数学学报

[2.23] Hua L K. Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, Transl of Math Monograph Vol 6, Amer Math Soc, 1963

[2.24] Hua L K. Geometries of Matrices I, Generalizations of von staudt's theorem. Tran Amer Math Soc, 1945, 57: 441~481

[2.25] 华罗庚. 数论导引. 科学出版社, 1975

[2.26] Kraus W. Über den Zusammen hang einiger charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung. Mitt Math Sem. Giessen, 1932, 21: 1~28

[2.27] Lehto O. Univalent functions and Teichmüller spaces, GTM 109, Springer-Verlag.

[2.28] 李忠. 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用. 科学出版社, 1988

[2.29] Mario O and Sarvas J. Injectivity theorems in plane and space. Ann Acad. Sci Fenn A1 Math, 1978/1979, 4: 253~257

[2.30] Molzon R and Tamanoi H. Generalized Schwarzians in several variables and Möbius invariant differential operators. IHES, preprint, M/94/64, Dec, 1994

[2.31] Nehari Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions. Bull Amer Math Soc, 1949, 55: 545~551

[2.32] Nehari Z. Some criteria of univalence. Proc Amer Math Soc, 1954, 5: 700~704

[2.33] Nehari Z. Univalence criteria depending on the Schwarzian derivative. Illinois J of Math, 1979, 23: 345~351

[2.34] Osgood B and Stove D. The Schwarzian derivative and conformal mappings of Riemannian manifolds. Duke Math J. 1992, 67: 57~99

[2.35] Osgood B and Stove D. A generalization of Nehari's univalence criterion. Comment Math Helv, 1990, 65: 234~242

[2.36] Pabel H. Kettenregel-Polynome in der affine Kurventheorie, Results in Math, 1990, 17: 140~148

[2.37] Pokornyi V V. On some sufficient conditions for univalence. Dokl Akad Nauk, SSSR (Russian) 1951, 79: 743~746

[2.38] Schwarz B. On two univalence criteria of Nehari. Illinois J of Math, 1983, 27: 346~351

[2.39] Schwarz H A. Über einige Abbildungsaufgaben, J. für reine und angewandte Math, 1869, 70: 105~120

[2.40] Tamanoi H. Higher Schwarzian operotors and combinatorics of Schwarzian derivative. IHES, preprint, M/94/67, Dec, 1994

[2.41] Thurston W P. Zippers and Univalent functions. The Bieberbach Conjecture, A Baernstein Ⅱ, et al. ed, Amer Math Soc, 1986, 185~197

[2.42] Yu Qihuang, Gong Sheng, Guo Xin. Schwarzian derivative of holomorphic mappings. Studies in Advanced Math, AMS/IP, 1997, 5: 317~323

第 3 章

凸映照与星形映照

§3.1 引　　言

作者之一于 1995 年出版了一本专著《多复变数的凸映照与星形映照》[3.4]，在该书中小结了从 1988 年以来作者与他的同事在这方面的系统研究工作. 正如在本书前言中所说的那样，本书是该书的姐妹篇. 在该书出版前后，十分可喜的是：刘太顺等一批数学工作者，经过不懈的努力，又得到一批重要的新结果，改进与发展了该书中的一些结果，使得这个方向的成果更加丰富与完整. 在这一章中，就是要来介绍他们在这个方向的一些工作的新进展，以作为该书的补充. 可以指望，还会有一些新的结果不断涌现，使得这个方向的理论更加深刻与丰富.

这一章中所用的有关定义与符号与《多复变数的凸映照与星形映照》一书中的相同，所以就不再重复定义与说明了.

在 §3.2 中，将给出在 Reinhardt 域

$$B_p = \left\{ z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n : \| z \|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < 1 \right\} \quad (p > 2)$$

上的正规化双全纯凸映照的齐次展开式. 刘太顺与张文俊[3.16]证明了如下有趣的结果：

定理 3.1.1　若 $w = f(z) : B_p \to \mathbf{C}^n (p > 2)$ 为正规化双全纯凸

映照，k 为一个满足 $k<p\leqslant k+1$ 的自然数，则

$$f(z)=\begin{pmatrix} z_1+a_{12}z_1^2+\cdots+a_{1k}z_1^k \\ z_2+a_{22}z_2^2+\cdots+a_{2k}z_2^k \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_n+a_{n2}z_2^2+\cdots+a_{nk}z_n^k \end{pmatrix}+O(|z|^{k+1}) \qquad (3.1.1)$$

成立，这里 f 为列向量，a_{ij} $(1\leqslant i\leqslant n,2\leqslant j\leqslant k)$ 均为常数，且均满足 $|a_{ij}|\leqslant 1$.

这条定理说明了：若 $f(z)$ 是 B_p 上的正规化双全纯凸映照，那么 f 的各个分量 $f_j(j=1,\cdots,n)$的展开式的开始 k 项只与一个变数 $z_j(j=1,\cdots,n)$有关. 而当 $p\to\infty$时，B_p 就成为多圆柱 Δ^n. 于是定理成为：若 $f(z)$是 Δ^n 上的正规化双全纯凸映照，那么 f 的各个分量 f_j $(j=1,2,\cdots,n)$只与一个变数 z_j $(j=1,2,\cdots,n)$有关. 这就是 Suffridge 定理(参阅文献[3.4]中第一章 §1.1，定理1.1.1，及文献[3.20]). 所以定理 3.1.1 是 Suffridge 定理的推广.

同时，定理 3.1.1 也部分地解答了文献[3.4]中第八章中的问题 13.

显然，$f(z)=\dfrac{z}{1-z_1}$是 $\mathbf{C}^n$ 中单位球 B^n 上的正规化双全纯凸映照，但由定理 3.1.1，这不是 B_p 上的正规化双全纯凸映照. 这也显示了 B^n 与 B_p 上的凸映照的不同.

关于 Suffridge 定理，刘太顺与任广斌[3.13]还给出了如下的推广：

定理 3.1.2　若 $\Omega_1\subseteq\mathbf{C}^{n_1},\cdots,\Omega_k\subseteq\mathbf{C}^{n_k}$为 k 个有界凸圆型域，$p_1(z),\cdots,p_k(w)$为它们的 Minkowski 泛函，且除去一个低维流形外，分别是 $z,\bar{z},\cdots,w,\bar{w}$ 的全纯函数. 若

$$f(z,\cdots,w)=(f_1(z,\cdots,w),\cdots,f_k(z,\cdots,w)):\Omega_1\times\cdots\times\Omega_k\to\mathbf{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{C}^{n_k}$$

为 $\Omega_1\times\cdots\times\Omega_k$ 上的全纯映照，且 $f(0,\cdots,0)=0$，则 f 为 $\Omega_1\times\cdots\times\Omega_k$ 上的双全纯凸映照，当且仅当

$$f(z,\cdots,w)=(\phi_1(z),\cdots,\phi_k(w))T,$$

这里 ϕ_i 为域 Ω_i 上的双全纯凸映照，$\phi_i:\Omega_i\to\mathbf{C}^{n_i}$ $(i=1,\cdots,k)$，T 为一个非异的$(n_1+\cdots+n_k)\times(n_1+\cdots+n_k)$的常数方阵.

显然，当 $\Omega_1=\cdots=\Omega_k=\Delta$，即单位圆时，定理 3.1.2 就是 Suffridge 定理.

由于有界凸圆型域是一类相当广泛的域，例如，不可约有界对称域以及由下面(3.1.2)式所定义的 D_p 等都是有界凸圆型域，所以定理 3.1.2 是很广泛的一条定理.

令(参阅文献[3.4]中第四章(4.1.4)式)

$$D_p=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n;|z_1|^{p_1}+\cdots+|z_n|^{p_n}<1,\quad p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_n\geqslant 1\},\tag{3.1.2}$$

现在证明 D_p 是有界凸圆型域. 需要证明的只是 D_p 是凸的.

若 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in D_p$，$w=(w_1,\cdots,w_n)\in D_p$，且 q_i 为满足 $\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1$ $(i=1,\cdots,n)$的实数，则由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{z_j+w_j}{2}\right|^{p_j}&\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{2^{q_j}}+\frac{1}{2^{q_j}}\right)^{\frac{1}{q_j}}(|z_j|^{p_j}+|w_j|^{p_j})^{\frac{1}{p_j}}\right)^{p_j}\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^{p_j\left(1-\frac{1}{q_j}\right)}}(|z_j|^{p_j}+|w_j|^{p_j})\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^{p_j}+|w_j|^{p_j})<1,\end{aligned}$$

即 $\frac{z+w}{2}\in D_p$. 因此 D_p 为凸域.

定理 3.1.2 将在 § 3.3 中进行证明.

在文献[3.4]中提到了关于不可约 Hermitian 对称流形上的凸映照有如下重要的莫一綦定理[3.17](也即文献[3.4]中的定理 1.1.3)：

定理 3.1.3 设 X_0 为不可约 Hermitian 对称流形，非紧，且秩$\geqslant 2$. 设 $\tau:X_0\to\Omega\subset\subset\mathbf{C}^N$ 为 Harish-Chandra 实现. 若 D 为 $\mathbf{C}^N$ 中的有界凸域，$f:X_0\to D$ 为双全纯，则 f 为 Harish-Chandra 嵌入，X_0 的自同构及 $\mathbf{C}^N$ 中的仿射线性变换的复合，即 f 为 $T\circ\tau\circ\phi$ 的

形式，这里 T 为 $\mathbf{C}^N$ 中的仿射线性变换，ϕ 为 X_0 的自同构.

由这条定理，对于秩≥2 的不可约的齐性对称空间上有界(实际上也包括无界)双全纯凸映照已全部找到. 因此文献[3.4]中第三章 §3.4 中所讨论的典型域上双全纯凸映照的偏差定理当秩≥2 时，就可直接应用莫一蔡定理得到完全的解答，即在文献[3.4]中第八章 §8.2 中的问题 4 中所猜想的与四类典型域的偏差定理有关的常数：$C_1(S)=\frac{1}{2}(n+m)$，$C_2(S)=\frac{1}{2}(n+1)$，$C_3(S)=n-1$ 以及 $C_4(S)=\frac{1}{2}n$，除去球以及与球相等价的那些域外，都可以由莫一蔡定理来直换证明这些猜想是完全正确的. 这也是由刘太顺所观察到并加以证明的. 他的证明大意如下：

以第一类典型域 $R_{\mathrm{I}}=\{Z\in\mathbf{C}^{m\times n}: I-Z\overline{Z}'>0\}(2\leqslant m\leqslant n)$ 为例：由莫一蔡定理，应用华罗庚的一些经典的结果[3.8]，可得：当秩≥2 时，R_{I} 上的正规化双全纯凸映照一定是 $Z(I^{(m)}-\overline{P}'Z)^{-1}$ 的形式，这里 $P\in R_{\mathrm{I}}$. 对此种形式的映照直换进行计算，立即得到：

$$\prod_{j=1}^{m}(1+\lambda_j)^{-m-n}\leqslant|\det J_f(Z)|\leqslant\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_j)^{-m-n},$$

这里 $1>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\geqslant0$ 为 $Z\overline{Z}'$ 的特征根的正平方根(参阅文献[3.4]第三章 §3.4(3.4.3)式). 因之，当 $2\leqslant m\leqslant n$ 时，$C_1(S)=\frac{1}{2}(n+m)$. 同样的方法可以由莫一蔡定理，应用华罗庚的一些经典的结果，得到第二、三、四类典型域上正规化双全纯凸映照的偏差定理的精确形式(与球相等价的域除外).

但是对于秩为 1 的不可约的齐性对称空间，即球的情形，就没有这样简单了.

Barnard，FitzGerald 与龚昇(在 $n=2$ 时)、刘太顺(在一般情形下)证明了如下的结果(见文献[3.1]、[3.12]、[3.4]的第 2 章 §2.1)：

若 $f(z)=z+(zA^1z',\cdots,zA^nz')+\cdots$ 为 B^n 上正规化双全纯凸映照，$f:B^n\to\mathbf{C}^n$，这里 $A^i=(a^i_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}(i=1,2,\cdots,n)$，则对所有的

$z\in B^n$，有

$$\frac{(1-|z|)^{C(S)-\frac{n+1}{2}}}{(1+|z|)^{C(S)+\frac{n+1}{2}}}\leqslant|\det J_f(z)|\leqslant\frac{(1+|z|)^{C(S)-\frac{n+1}{2}}}{(1-|z|)^{C(S)+\frac{n+1}{2}}},\tag{3.1.3}$$

式中 $C(S)=\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^{i}\right|: f\text{ 为 }B^n\text{ 上所有正规化双全纯凸映照}\right\}$，并证明了：$\frac{n+1}{2}\leqslant C(S)\leqslant1+\frac{\sqrt{2}(n-1)}{2}$，且猜测 $C(S)=\frac{n+1}{2}$[3.1]. 最近 Pfaltzgraff 与 Suffridge 给出了反例[3.18]，说明上述猜测不成立. 在§3.4 中将给出这个反例. 这就否定了文献[3.4]中第八章§8.2 中问题 4 的前半部分. $C(S)$的精确值至今仍是一个未知数.

但是余其煌、王世坤与龚昇[3.6]给出了矩阵形式的球上正规化双全纯凸映照的偏差定理(参阅文献[3.4]中第三章§3.1).

若 $f(z)$为 B^n 上正规化双全纯凸映照，$f: B^n\to\mathbf{C}^n$，则

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^2G\leqslant J_f(Z)\,\overline{J_f(Z)}'\leqslant\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2G\tag{3.1.4}$$

成立，式中

$$G=(g_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\left(\frac{(1-|z|^2)\delta_{ij}+\bar{z}_iz_j}{(1-|z|^2)^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

为 B^n 的 Bergman 度量矩阵.

上述估计是精确的.

龚昇与刘太顺[3.5]将上述结果推广到了一般的有界凸圆型域上. 这是充分应用了有界凸圆型域上的增长定理[3.15]而得到的. 将在§3.5 中证明这两条定理.

关于全纯映照成为凸映照，有如下的判别准则，Kikuchi 在文献[3.9]中证明了：

若 f：$B^n\to\mathbf{C}^n$ 为局部双全纯映照，且 $f(0)=0$，则 f 为 B^n 上的双全纯凸映照，当且仅当

$$1-\Re\mathrm{e}\left\{\bar{z}'J_f^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}(z)\alpha^2\right\}\geqslant 0 \tag{3.1.5}$$

对所有的 $z\in B^n$, $\alpha\in\partial B^n$ 都成立，这里 z、α 为列向量，且 $\Re\mathrm{e}\{\bar{z}'\alpha\}=0$，而

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}(z)\alpha^2=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z_i\partial z_j}(z)\alpha_i\alpha_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 f_n}{\partial z_i\partial z_j}(z)\alpha_i\alpha_j\end{pmatrix}. \tag{3.1.6}$$

余其煌、王世坤、龚昇[3.6]证明了：

假设如上，则 f 为 B^n 上的双全纯凸映照，当且仅当

$$|b|^2+\Re\mathrm{e}\left\{\sum_{i,j,\alpha,\beta,\gamma}b_\beta b_\gamma\frac{\partial w_i}{\partial z_\beta}\cdot\frac{\partial w_j}{\partial z_\gamma}\bar{z}_\alpha\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial w_i\partial w_j}\right\}\geqslant 0 \tag{3.1.7}$$

对所有的 $z\in B^n$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{C}^n$，且 $\Re\mathrm{e}\{z\bar{b}'\}=0$ 都成立，式中 $w=f(z)=(w_1,\cdots,w_n)$.

不难证明：这两个判别准则是相互等价的.

最近朱玉灿[3.22]将上述结果推广到了 B_p 上，他证明了：

若 $p\geqslant 2$, $f:B_p\to\mathbf{C}^n$ 为 B_p 上的局部双余纯映照，且 $f(0)=0$，则 f 为 B_p 上的双余纯凸映照，当且仅当

$$\frac{p}{2}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^{p-2}|b_k|^2+\left(\frac{p}{2}-1\right)\Re\mathrm{e}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{|z_k|^p}{z_k^2}b_k^2\right\}$$
$$+\Re\mathrm{e}\left\{\sum_{i,j,\alpha,\beta,\gamma}b_\beta b_\gamma\frac{\partial w_i}{\partial z_\beta}\cdot\frac{\partial w_j}{\partial z_\gamma}\cdot\frac{|z_\alpha|^p}{z_\alpha}\cdot\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial w_i\partial w_j}\right\}\geqslant 0 \tag{3.1.8}$$

对所有的 $z\in B_p$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{C}^n$，且 $\Re\mathrm{e}\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|z_k|^p}{z_k}b_k\right\}=0$ 都成立，这里 $w=f(z)=(w_1,\cdots,w_n)$.

而(3.1.8)又等价于

$$\frac{p}{2}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^{p-2}|b_k|^2+\left(\frac{p}{2}-1\right)\Re\mathrm{e}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{|z_k|^p}{z_k^2}b_k^2\right\}$$

$$-\Re e\left\{\sum_{v,l,m,i,j}\frac{|z_v|^p}{z_v}\cdot\frac{\partial z_v}{\partial w_j}\cdot\frac{\partial^2 w_j}{\partial z_l\partial z_m}b_lb_m\right\}\geqslant 0. \quad (3.1.9)$$

显然(3.1.8)为(3.1.7)的推广,(3.1.9)为(3.1.5)的推广. 以上讨论的都是凸映照,从这些讨论可以看出:对凸映照的研究已愈来愈完整. 关于星形映照,则有如下的一些新的结果.

刘太顺与任广斌[3.14]给出了有界星形圆型域上星形映照的增长定理如下:

定理3.1.4 若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界星形圆型域,其 Minkowski 泛函①$p(z)=\inf\left\{C>0:\frac{z}{C}\in\Omega\right\}$除去一个低维流形外是一阶连续可微的. 若 $f(z):\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为 Ω 上正规化双全纯星形映照,则

$$\frac{p(z)}{(1+p(z))^2}\leqslant p(f(z))\leqslant\frac{p(z)}{(1-p(z))^2} \quad (3.1.10)$$

以及

$$\frac{|z|}{(1+p(z))^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-p(z))^2} \quad (3.1.11)$$

成立,且(3.1.10)与(3.1.11)相互等价,即从一个不等式可以导出另一个不等式.

由(3.1.11)即可推出

$$f(\Omega)\supset\frac{1}{4}\Omega. \quad (3.1.12)$$

由于典型域以及

$$E_p=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:|z_1|^{p_1}+\cdots+|z_n|^{p_n}<1,p_1\geqslant\cdots\geqslant p_n>0\}$$

都是有界星形圆型域,因此文献[3.4]的第七章中关于典型域及 B_p 上的正规化双全纯星形映照的增长定理与掩盖定理都可由此概括. 当然,定理3.1.4的证明的基本想法是与文献[3.4]的第七章的定理7.1.1的证明是一脉相承的. 由于有界星形圆型域是一类相

① Minkowski 泛函一般只在平衡凸域上定义,在这里仍沿用这个名称,这也可称为距离函数[3.10].

当广泛的域，因此定理3.1.4基本上回答了文献[3.4]的第八章§8.3的问题8(3).

定理3.1.4将在§3.6中给出证明.

在证明定理3.1.4的过程中，将证明：假设如定理3.1.4，则有：对所有的 $z\in\Omega$，

$$\Re e\left\{\frac{\partial p(z)}{\partial z}J_f^{-1}(z)f(z)\right\}\geqslant 0 \qquad (3.1.13)$$

成立.

也就是说：若 Ω 为有界星形圆型域，其 Minkowski 泛函 $p(z)\in C^1$(除去一个低维流形). 若 $f:\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为正规化双全纯映照，则(3.1.13)式是 f 成为星形映照的必要条件.

(3.1.13)是否也是双全纯映照成为星形映照的充分条件呢？回答是肯定的(见文献[3.7]). 这只作为文献[3.4]中第六章定理6.2.1的一个简单的推论即可得到，f 只要求是在 Ω 上局部双全纯. 这一证明将在§3.7中给出. 当域为有界凸圆型域时，这个结果已由林运泳与洪毅以及陈正所证明(见文献[3.11]和[3.2])，而上述在有界星形圆型域上全纯映照成为星形映照的判别准则又推广了他们的结果.

不仅如此，在§3.7中还一般地讨论了 r-域上全纯映照成为星形映照的充分条件与必要条件，并且指出，以往已知的大部分结果都可由此推出(余其煌，王世坤，龚昇[3.7]).

从上述的这些结果可以看出，经过大家的努力，在短短的几年中，文献[3.4]中的一部分结果，得到了很大的推进，使这个方向的工作日趋成熟.

§ 3.2 Reinhardt 域 B_p 上双全纯凸映照的展开式

引理3.2.1 若 $f:B_p\to\mathbf{C}^n$ $(p>1)$为 B_p 上的正规化双全纯凸映照，则对任意的$(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in\mathbf{R}^n$，有不等式

$$\Re e\left\{\frac{\partial \rho}{\partial z}(z)\left[\begin{pmatrix} A_1^2 z_1 \\ A_2^2 z_2 \\ \vdots \\ A_n^2 z_n \end{pmatrix} + J_f^{-1}(z)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z)(Az)^2\right]\right\} \geqslant 0 \quad (3.2.1)$$

对所有 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in B_p$ 都成立，这里

$$\rho(z)=\left(\sum_j |z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \frac{\partial \rho}{\partial z}(z)=\left(\frac{\partial \rho}{\partial z_1}(z),\cdots,\frac{\partial \rho}{\partial z_n}(z)\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z)(Az)^2=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(z)A_i z_i A_j z_j;$$

f 为列向量.

证 令

$$G_{A,t}(z)=f^{-1}\left[\frac{f(e^{iA_1t}z_1,\cdots,e^{iA_nt})+f(e^{-iA_1t}z_1,\cdots,e^{-iA_nt})}{2}\right],$$

则 $G_{A,t}:B_p\to B_p$，$G_{A,t}(0)=0$. 由文献[3.4]中第六章§6.2的定理6.2.2，点 $G_{A,t}(z)$ 是落在凸集 $\{\xi\in \mathbf{C}^n:\rho(\xi)\leqslant\rho(z)\}$ 之中，这里

$$\rho(z)=\|z\|_p=\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由于 $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ 为凸域 $\{\xi\in \mathbf{C}^n:\rho(\xi)<\rho(z)\}$ 在边界点 z 的法向量，且由于 ρ 为实函数，由凸域的几何特征，得到

$$\Re e\left\{\frac{\partial \rho}{\partial z}(z)z\right\}\geqslant \Re e\left\{\frac{\partial \rho}{\partial z}(z)G_{A,t}(z)\right\},$$

此即

$$\Re e\left\{\frac{\partial \rho}{\partial z}(z)[z-G_{A,t}(z)]\right\}\geqslant 0. \quad (3.2.2)$$

经计算可得

$$G_{A,t}(z)=z-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} A_1^2 z_1 \\ A_2^2 z_2 \\ \vdots \\ A_n^2 z_n \end{pmatrix}+J_f^{-1}(z)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z)(Az)^2\right]t^2+o(t^2).$$

将上式代入(3.2.2)，然后在(3.2.2)的两端除以 t^2，再令 $t\to 0$，就

得(3.2.1).

引理3.2.2 若 $\rho_m(z)=(|z_1|^p+\cdots+|z_m|^p)^{\frac{1}{p}}$ $(p>2)$为 $\mathbf{C}^m$ 中 $B_p(m)$ 的定义函数，$f:B_p(m)\to\mathbf{C}^m$ 是全纯映照，且

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial z}(z)f(z)\equiv 0.$$

这里 f 为列向量,则 $f\equiv 0$.

证 由 $\rho_m(z)$的定义知：

$$\rho_m^p(z)=(z_1\bar{z}_1)^{\frac{p}{2}}+\cdots+(z_m\bar{z}_m)^{\frac{p}{2}}.$$

对 $z_j(j=1,\cdots,m)$求导,就得

$$p\rho_m^{p-1}(z)\frac{\partial\rho_m}{\partial z_j}=\frac{p}{2}z_j^{\frac{p}{2}-1}\bar{z}_j^{\frac{p}{2}}.$$

设 $f=(f_1,\cdots,f_m)'$，则所设条件就是

$$\sum_{j=1}^{m}z_j^{\frac{p}{2}-1}\bar{z}_j^{\frac{p}{2}}f_j(z)\equiv 0.$$

在上式两端对 $\bar{z}_k$ 求导$(k=1,2,\cdots,m)$,得到

$$\frac{p}{2}z_k^{\frac{p}{2}-1}\bar{z}_k^{\frac{p}{2}-1}f_k(z)\equiv 0.$$

因此 $f_k(z)\equiv 0$ $(k=1,2,\cdots,m)$. 即 $f(z)\equiv 0$.

现在证明定理3.1.1.

先证 $n=2$ 的情形：

显然

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}(z)=\frac{1}{2[\rho(z)]^{p-1}}(|z_1|^{p-2}\bar{z}_1,|z_2|^{p-2}\bar{z}_2).$$

于是(3.2.1)可写成

$$A_1^2|z_1|^p+A_2^2|z_2|^p+\Re\mathrm{e}\left\{\frac{(|z_1|^{p-2}\bar{z}_1,|z_2|^{p-2}\bar{z}_2)}{\det J_f(z)}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} & -\dfrac{\partial f_1}{\partial z_2}\\ -\dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}A_1^2z_1^2+2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z_1\partial z_2}A_1A_2z_1z_2+\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z_2^2}A_2^2z_2^2\\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2}A_1^2z_1^2+2\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z_1\partial z_2}A_1A_2z_1z_2+\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z_2^2}A_2^2z_2^2\end{pmatrix}\right\}\geqslant 0, \tag{3.2.3}$$

于是可以证明：

(1) 对于任何固定的 z_2，$z_1=0$ 是(z_1的)全纯函数

$$g(z_1,z_2)=\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z_1,z_2)\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2}(z_1,z_2)-\frac{\partial f_2}{\partial z_1}(z_1,z_2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}(z_1,z_2)$$

的次数至少为 $k-1$ 次的零点.

(2) 对于任何固定的 z_1，$z_2=0$ 是(z_2的)全纯函数

$$h(z_1,z_2)=\frac{\partial f_2}{\partial z_2}(z_1,z_2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_2^2}(z_1,z_2)-\frac{\partial f_1}{\partial z_2}(z_1,z_2)\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_2^2}(z_1,z_2)\tag{3.2.4}$$

的次数至少为 $k-1$次的零点.

用反证法来证明(1)：若不然，$z_1=0$为 g 的 $m(0\leqslant m\leqslant k-2)$次零点，于是 $m+2\leqslant k<p$. 记 $g(z_1,z_2)=z_1^m\varphi(z_1,z_2)$，则 $\varphi(0,z_2)\neq 0$.

在(3.2.3)中取 $A_1=1$，$A_2=0$，就有

$$|z_1|^p+\Re e\left\{\frac{z_1^2}{\det J_f(z)}\left[|z_1|^{p-2}\bar{z}_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}-\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+|z_2|^{p-2}\cdot\bar{z}_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2}-\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}\right)\right]\right\}\geqslant 0.$$

在上式两端除以 $|z_1|^{m+2}$，再令 $z_1\to 0$，就得

$$\Re e\left\{\frac{1}{\det J_f(0,z_2)}|z_2|^{p-2}\bar{z}_2e^{i(m+2)\theta}\varphi(0,z_2)\right\}\geqslant 0$$

对所有 $\theta\in\mathbf{R}$ 都成立. 因之 $\varphi(0,z_2)=0$. 导致矛盾. 这就证明了(1). 用同样方法可证明(2).

在(3.2.3)中取 $A_1=|z_2|^\alpha$，$A_2=1$，这里 $\alpha>0$为任一正数，就有

$$\Re e\left[2|z_1|^p\cdot|z_2|^\alpha z_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1\partial z_2}-\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1\partial z_2}\right)+|z_1|^{p-2}\bar{z}_1z_2^2\right.$$
$$\left.\times h(z_1,z_2)\right]+O(|z_2|^{2\alpha})+O(|z_2|^p)\geqslant 0.\tag{3.2.5}$$

这里 $h(z_1,z_2)$ 由(3.2.4)所定义.

接下来证明：

(3) 对于任意固定的 z_1，$z_2=0$ 是(z_2的)全纯函数

$$r(z_1,z_2)=\frac{\partial f_2}{\partial z_2}(z_1,z_2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1\partial z_2}(z_1,z_2)-\frac{\partial f_1}{\partial z_2}(z_1,z_2)\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1\partial z_2}(z_1,z_2)$$

的次数至少为 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 次的零点.

(4) 对于任意固定的 z_2，$z_1=0$ 是 (z_1的) 全纯函数

$$S(z_1,z_2)=\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z_1,z_2)\frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1\partial z_2}(z_1,z_2)-\frac{\partial f_2}{\partial z_1}(z_1,z_2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1\partial z_2}(z_1,z_2)\tag{3.2.6}$$

的次数至少为 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 次的零点.

用反证法来证明(3):若不然，$z_2=0$ 为 r 的 m 次零点，$0\leqslant m\leqslant\left[\frac{k}{2}\right]-1$. 于是

$$m+1\leqslant\left[\frac{k}{2}\right]\leqslant\frac{k}{2}\leqslant k-\left[\frac{k}{2}\right]=k-1-\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)\leqslant k-1-m<p-(1+m).$$

在(3.2.5)中选取 α，使满足 $m+1<\alpha<p-(1+m)$，于是 $2\alpha>\alpha+1+m, p>\alpha+1+m$. 记

$$r(z_1,z_2)=z_2^m\psi(z_1,z_2)，\text{ 则 } \psi(z_1,0)\neq 0.$$

在 (3.2.5) 的两端除以 $|z_2|^{\alpha+1+m}$，再令 $z_2\to 0$，就得

$$\mathfrak{Re}\{2|z_1|^p e^{i(m+1)\theta}\psi(z_1,0)\}\geqslant 0$$

对所有 $\theta\in\mathbf{R}$ 都成立. 因之 $\psi(z_1,0)=0$. 导致矛盾. 这就证明了(3). 用同样方法可证明(4).

接下来证明:

(5) $\frac{\partial f_2}{\partial z_1}(0,z_2)=0$ 及 $\frac{\partial f_1}{\partial z_2}(z_1,0)=0$.

这只要证明其中之一即可,另一个证明是相仿的. 现在证明前一个,这只要证明:

$$\frac{\partial^{j+1}f_2}{\partial z_1\partial z_2^j}(0,0)=0\quad(j=0,1,2,\cdots)\tag{3.2.7}$$

即可.

用归纳法来证明：由于 f 是正规化的，故 $\frac{\partial f_2}{\partial z_1}(0,0)=0$，即(3.2.7)当 $j=0$ 时成立. 若 (3.2.7)当 $0\leqslant j\leqslant m$ 时成立. 将 $\frac{\partial^m}{\partial z_2^m}$ 作用在由(3.2.6)所定义的 $S(0,z_2)$ 上，再令 $z_2=0$，由 Leibniz 公式及归纳假设，得到

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0,0)\ \frac{\partial^{m+2} f_2}{\partial z_1 \partial z_2^{m+1}}(0,0)=0.$$

由于 $\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0,0)=1$，故(3.2.7)当 $j=m+1$ 时也成立.
这就证明了(5).

接着来证明：

(6) $\frac{\partial^j f_2}{\partial z_1^j}(0,z_2)\equiv 0$，当 $1\leqslant j\leqslant k$；

$\frac{\partial^j f_1}{\partial z_2^j}(z_1,0)\equiv 0$，当 $1\leqslant j\leqslant k$.

这样就得到了

$$f(z)=\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1+a_{12}z_1^2+\cdots+a_{1k}z_1^k \\ z_2+a_{22}z_2^2+\cdots+a_{2k}z_2^k \end{pmatrix}+O(|z|^{k+1}). \tag{3.2.8}$$

这就证明了(3.1.1)式当 $n=2$ 的情形.

依然用归纳法来证明(6). 只需证明(6)的后一式.

当 $j=1$ 时，在(5)中已证明其成立. 若

$$\frac{\partial^j f_1}{\partial z_2^j}(z_1,0)\equiv 0$$

当$1\leqslant j\leqslant m<k$ 时成立，将 $\frac{\partial^{m-1}}{\partial z_2^{m-1}}$ 作用到由(3.2.4)式所定义的 $h(z_1,z_2)$上. 由 Leibniz 公式及归纳假设，

$$\frac{\partial f_2}{\partial z_2}(z_1,0)\ \frac{\partial^{m+1} f_1}{\partial z_2^{m+1}}(z_1,0)\equiv 0.$$

由于$\frac{\partial f_2}{\partial z_2}(z_1,0)\neq 0$，故$\frac{\partial^{m+1} f_1}{\partial z_2^{m+1}}(z_1,0)\equiv 0$. 由于 $z_2=0$为 $h(z_1,z_2)$的

至少为 $k-1$ 次的零点，故归纳步骤至少可到 $m=k-1$. 这就证明了(6).

在文献[3.4]中第四章§4.2中已证明了：正规化双全纯凸映照的展开式的 j 次项的范数不超过 $\|z\|_p^j$. 因此由(3.2.8)立得 $|a_{ij}|\leqslant 1$ $(i=1,2;2\leqslant j\leqslant k)$. 这就完全证明了定理 3.1.1，当 $n=2$ 的情形.

现在来证明定理3.1.1当 $n>2$ 时的情形：

如果 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_m)\in\mathbf{C}^n$，记 $z^*=(z_2,\cdots,z_m)$，则 $z=(z_1,z^*)$，若 ρ_m 为 $\mathbf{C}^m$ 中 B_p 的定义函数，则

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial z}(z)=\frac{1}{2[\rho_m(z)]^{p-1}}(|z_1|^{p-2}\bar{z}_1,|z_2|^{p-2}\bar{z}_2,\cdots,|z_m|^{p-2}\bar{z}_m),\tag{3.2.9}$$

$$\frac{\partial\rho_n}{\partial z}(0,z^*)=\left(0,\frac{\partial\rho_{n-1}}{\partial z^*}(z^*)\right).\tag{3.2.10}$$

若 f 为 $B_p\subset\mathbf{C}^n$ 上的正规化双全纯凸映照，则由(3.2.1)及(3.2.9)得到

$$\Re\mathrm{e}\left\{(|z_1|^{p-2}\bar{z}_1,|z_2|^{p-2}\bar{z}_2,\cdots,|z_n|^{p-2}\bar{z}_n)J_f^{-1}(z)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z)(Az)^2\right\}$$
$$+A_1^2|z_1|^p+A_2^2|z_2|^p+\cdots+A_n^2|z_n|^p\geqslant 0.\tag{3.2.11}$$

在(3.2.11)中取 $A_1=1$，$A_2=\cdots=A_n=0$，得到

$$|z_1|^p+\Re\mathrm{e}\left\{(|z_1|^{p-2}\bar{z}_1,|z_2|^{p-2}\bar{z}_2,\cdots,|z_n|^{p-2}\bar{z}_n)J_f^{-1}(z)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z)z_1^2\right\}$$
$$\geqslant 0.\tag{3.2.12}$$

记

$$J_f^{-1}(z)\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}(z)=\begin{pmatrix}h(z)\\g(z)\end{pmatrix}.\tag{3.2.13}$$

这里 $h(z)\in\mathbf{C}$，$g(z)=(g_2(z),\cdots,g_n(z))'\in\mathbf{C}^{n-1}$，则(3.2.12)可写成

$$|z_1|^p+\Re\mathrm{e}\{|z_1|^p z_1 h(z)\}+\Re\mathrm{e}\{(|z_2|^{p-2}\bar{z}_2,\cdots,|z_n|^{p-2}\bar{z}_n)g(z)z_1^2\}$$
$$\geqslant 0.\tag{3.2.14}$$

要证明：固定 z^*，$z_1=0$是 $g(z_1,z^*)$的每个分量 $g_j(z_1,z^*)$ $(j=2,\cdots,n)$ 的至少 $k-1$ 次的零点.

用反证法：若不然，对所有 $g_j(z_1,z^*)$及所有 z^* $(j=2,\cdots,n)$ 其中 $z_1=0$作为零点的最小次数为 $m(0\leqslant m\leqslant k-2)$. 则 $m+2\leqslant k<p$. 记 $g(z_1,z^*)=z_1^m\varphi(z_1,z^*)$，则 $\varphi(z_1,z^*)$在 B_p 中全纯，并且 $\varphi(0,z^*)\not\equiv 0$ 对所有$(0,z^*)\in B_p$ 都成立. 对(3.2.14) 两端除以 $|z_1|^{m+2}$，令 $z_1\to 0$，则有

$$\Re e\{(|z_2|^{p-2}\bar{z}_2,\cdots,|z_n|^{p-2}\bar{z}_n)e^{i(m+2)\theta}\varphi(0,z^*)\}\geqslant 0$$

对所有 $\theta\in\mathbf{R}$，$(0,z^*)\in B_p$ 都成立. 由(3.2.9)、(3.2.10)及上式导出：

$$\frac{\partial\rho_{n-1}}{\partial z^*}(z^*)\varphi(0,z^*)\equiv 0$$

对所有 $(0,z^*)\in B_p$ 都成立. 由引理3.1.2得到 $\varphi(0,z^*)\equiv 0$. 导致矛盾.

于是，由(3.2.13)即可得到：

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}(0,z^*)\\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2}(0,z^*)\\ \vdots\\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial z_1^2}(0,z^*)\end{pmatrix}=J_f(0,z^*)\begin{pmatrix}h(0,z^*)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=h(0,z^*)\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0,z^*)\\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(0,z^*)\\ \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(0,z^*)\end{pmatrix}$$

由此得到 $h(0,z^*)=\dfrac{\partial^2 f_j(0,z^*)}{\partial z_1^2}\Big/\dfrac{\partial f_j(0,z^*)}{\partial z_1}$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

由于(3.2.13)，有

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_1^2}=\frac{\partial f_j}{\partial z_1}h+\sum_{k=2}^{n}g_k\frac{\partial f_j}{\partial z_k},$$

已证 $g_k(z_1,z^*)$当 z^*固定时，$z_1=0$为 g_k 的至少 $k-1$次的零点. 故

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_1^2}(z_1,z^*)-\frac{\partial f_j}{\partial z_1}(z_1,z^*)h(z_1,z^*)$$

当 z^*固定时，$z_1=0$ 为其至少 $k-1$ 次零点. 因此

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z_1,z^*)\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_1^2}(z_1,z^*)-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}(z_1,z^*)\frac{\partial f_j}{\partial z_1}(z_1,z^*)$$
$$=\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z_1,z^*)\left[\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_1^2}(z_1,z^*)-\frac{\partial f_j}{\partial z_1}(z_1,z^*)h(z_1,z^*)\right]$$
$$-\frac{\partial f_j}{\partial z_1}(z_1,z^*)\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}(z_1,z^*)-\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z_1,z^*)h(z_1,z^*)\right]$$

当 z^* 固定时，$z_1=0$ 为其至少 $k-1$ 次零点. 这里 $j=2,\cdots,n$. 于是有：

(7) 对于任意固定的 z^*，$z_1=0$ 是 (z_1的) 全纯函数

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z_1,z^*)\frac{\partial^2 f_j}{\partial z_1^2}(z_1,z^*)-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}(z_1,z^*)\frac{\partial f_j}{\partial z_1}(z_1,z^*)$$
$$(j=2,\cdots,n)$$

的次数至少为 $k-1$ 次的零点.

将 $z_k(k=2,\cdots,n)$ 替代 z_1，上述结论仍然成立 (对照 $n=2$ 时的(1)与(2)).

在(3.2.11)中取 $A_1=1$，$A_j=|z_1|^\alpha$，$A_i=0$ 当 $i\neq j$ 时，式中 α 为任一正数，就有

$$|z_1|^p+|z_1|^{2\alpha}|z_j|^p$$
$$+\Re\Big\{(|z_1|^{p-2}\bar{z}_1,|z_2|^{p-2}\bar{z}_2,\cdots,|z_n|^{p-2}\bar{z}_n)J_f^{-1}(z)$$
$$\times\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}(z)z_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z_j^2}(z)|z_1|^{2\alpha}z_j^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_j}(z)|z_1|^\alpha z_1z_j\right)\Big\}$$
$$\geqslant 0.$$

记
$$J_f^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_j}(z)=\begin{pmatrix}s(z)\\ r(z)\end{pmatrix}.$$

这里 $s(Z)\in\mathbf{C}$, $r(z)=(r_2(z),\cdots,r_n(z))'\in\mathbf{C}^{n-1}$. 则可如同证明 $n=2$ 时的情形(3)与(4)那样，应用证明(7)的相仿的步骤，可以证明：

(8) 对于任意固定的 z^*，$z_1=0$ 是 (z_1的) 全纯函数：

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z_1,z^*)\frac{\partial^2 f_m}{\partial z_1\partial z_j}(z_1,z^*)-\frac{\partial f_m}{\partial z_1}(z_1,z^*)\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1\partial z_j}(z_1,z^*)$$

$$(j=2,3,\cdots,n;m=2,3,\cdots,m)$$

的次数至少为 $\left[\frac{k}{2}\right]$ 次的零点.

将 $z_k(k=2,\cdots,n)$ 替代 z_1，上述结论仍然成立(对照 $n=2$ 时的(3)与(4)).

由(7)与(8)，如同证明 $n=2$ 时的(5)与(6)那样，可以证明：

(9) $\dfrac{\partial^{|\alpha|+1} f_m(0)}{\partial z_1\partial z_2^{\alpha_2}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\equiv 0$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_j\geqslant 0$ $(j=2,\cdots,n)$

为非负整数，$|\alpha|=\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. 因此

$$\frac{\partial f_m}{\partial z_1}(\theta,z^*)\equiv 0\quad(m=2,3,\cdots,n)$$

(对照 $n=2$ 时的(5)).

(10) $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f_1(z_1 0)}{\partial z_2^{\alpha_2}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}\equiv 0$，$\alpha=(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_j\geqslant 0$ $(j=2,\cdots,n)$

为非负整数，$|\alpha|=\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. 这样就有

$$f_1(z)=z_1+a_{12}z_1^2+\cdots+a_{1k}z_1^k+O(|z|^{k+1}).$$

同样可证 $f_j(z)$ 的展开式的前 k 次项只依赖于 z_j $(j=2,\cdots,n)$ (对照 $n=2$ 时的(6)).

这就证明了定理3.1.1.

§ 3.3　双全纯凸映照的分解定理

§ 3.1中的定理3.1.2是下列定理的一个推论.

定理3.3.1　若 $\Omega_1\subset\mathbf{C}^{n_1}$，$\Omega_2\subset\mathbf{C}^{n_2}$ 为有界凸圆型域，$p_1(z)$，$p_2(w)$ 为它们的 Minkowski 泛函，且除去一个低维流形外，分别是 $z,\bar{z}$ 及 $w,\bar{w}$ 的全纯函数. 若 $f(z,w)=(f_1(z,w),f_2(z,w))$：$\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbf{C}^{n_1}\times\mathbf{C}^{n_2}$ 为 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上的全纯映照，则 f 是一个正规化双全纯凸映照当且仅当 $f(z,w)=(\phi_1(z),\phi_2(w))$，这里 $\phi_i:\Omega_i\to\mathbf{C}^{n_i}$ 为域 Ω_i $(i=1,2)$ 上的正规化双全纯凸映照.

为证明定理3.3.1,先给出下面的Schwarz型引理3.3.1,这条引理也可从Banach空间的单位球上的Schwarz引理直接推出(参阅文献[3.3]).现给出另一个证明如下:

引理3.3.1 若Ω为$\mathbf{C}^n$中的有界凸圆型域,$p(z)$是它的Minkowski泛函.若$f:\Omega\to\Omega$为Ω上的全纯映照,$f(0)=0$,则$p(f(z))\leqslant p(z)$对所有$z\in\Omega$都成立.

证 记Δ为$\mathbf{C}$中单位圆盘.固定Ω中的一点z,记$\varphi(\zeta)=f(\zeta z)\zeta^{-1}$,$\zeta\in\overline{\Delta}$.由于$f(\Omega)\subseteq\Omega$,且$\Omega$为圆型域.因此$\varphi(\partial\Delta)\subset\subset\Omega$.以下证$\varphi(\overline{\Delta})\subseteq\Omega$.用反证法:如不然,则存在$r_0$ $(0<r_0<1)$使得当$0<r<r_0$时,$r\varphi(\overline{\Delta})\subseteq\Omega$;而当$r_0<r<1$时,$r\varphi(\overline{\Delta})\nsubseteq\Omega$.记$\varphi_r(z)=r\varphi(z)$,于是$\bigcup\limits_{0<r<r_0}\varphi_r(\overline{\Delta})$在$\Omega$中不是相对紧的.由于$\varphi(\partial\Delta)\subset\subset\Omega$且$\Omega$是星形的,故

$$\varphi_r(\partial\Delta)=r\varphi(\partial\Delta)\subset\subset\Omega,\ 当\ 0<r<1.$$

于是
$$\bigcup_{0<r<1}\varphi_r(\partial\Delta)\subset\subset\Omega.$$

由凸域为全纯域以及全纯域的解析圆盘的性质(参阅文献[3.10]中的定理3.3.5)得到$\bigcup\limits_{0<r<r_0}\varphi_r(\overline{\Delta})\subset\subset\Omega$.导致矛盾.

由于$\varphi(\overline{\Delta})\subseteq\Omega$,根据$\varphi$及$p(z)$的定义,即得$p\left(\dfrac{f(\zeta z)}{\zeta}\right)\leqslant 1$.因此$p(f(\zeta z))\leqslant|\zeta|$对每个$z\in\Omega$,$|\zeta|<1$都成立.取极限,上式对$z\in\overline{\Omega}$也成立.在上式中以$\dfrac{z}{p(z)}$代替$z$也成立.特别取$\zeta=p(z)$,这就证明了引理3.3.1.

引理3.3.2 若$\Omega_i\subseteq\mathbf{C}^{n_i}$ $(i=1,2)$为有界凸圆型域,其Minkowski泛函p_i $(i=1,2)$除去一个低维流形外,具有一阶连续偏导数.若映照

$$v(z,w,t)=\begin{pmatrix}v_1(z,w,t)\\ v_2(z,w,t)\end{pmatrix}:\Omega_1\times\Omega_2\times[0,1]\to\Omega_1\times\Omega_2\ 满足:$$

(i) 固定t,$v(z,w,t)$是z,w的全纯映照;

(ii) $$v(z,w,0)=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},\ v(0,0,t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(iii) $$\lim_{t\to 0}\frac{\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} v_1(z,w,t) \\ v_2(z,w,t) \end{pmatrix}}{t^2}=\begin{pmatrix} P(z,w) \\ Q(z,w) \end{pmatrix}$$

存在，则除去一个低维流形外，下列不等式：

$$\Re e\left\{\frac{\partial p_1}{\partial z}(z)P(z,w)\right\}\geqslant 0 \text{对满足 } p_2(w)\leqslant p_1(z) \text{的} (z,w);$$

$$\Re e\left\{\frac{\partial p_2}{\partial w}(w)Q(z,w)\right\}\geqslant 0 \text{对满足 } p_1(z)\leqslant p_2(w) \text{的} (z,w)$$

都成立，这里 $z\in\Omega_1$，$w\in\Omega_2$ 均为列向量．而

$$\frac{\partial p_1}{\partial z}(z)=\left(\frac{\partial p_1}{\partial z_1}(z),\cdots,\frac{\partial p_1}{\partial z_{n_1}}(z)\right),$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial w}(w)=\left(\frac{\partial p_2}{\partial w_1}(w),\cdots,\frac{\partial p_2}{\partial w_{n_2}}(w)\right).$$

证　由 Minkowski 泛函的定义，立即得到 $\Omega_1\times\Omega_2$ 的 Minkowski 泛函 $p(z,w)$ 为

$$p(z,w)=\max(p_1(z),p_2(z)).$$

由本引理的假设及引理3.3.1，得到

$$\max(p_1(v_1),p_2(v_2))\leqslant\max(p_1(z),p_2(w)).$$

若 $p_2(w)\leqslant p_1(z)$，就有

$$v_1(z,w,t)\in\{\xi\in\mathbf{C}^{n};p_1(\xi)<p_1(z)\}.$$

固定 $z\in\mathbf{C}^{n_1}$，则域 $A=\{\xi\in\mathbf{C}^{n_1};p_1(\xi)<p_1(z)\}$ 为凸域．这可证明如下：若 $\xi_1\in A$，$\xi_2\in A$，则

$$p_1\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(p_1(\xi_1)+p_2(\xi_2))<p_1(z),$$

即 $\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\in A$．因之，$A$ 为凸域．$\frac{\partial p_1}{\partial \bar{z}}(z)$ 为域 A 在边界点 z 的法向量，而 p_1 为实函数．由凸域的几何特征，就有：对每个满足 $p_2(w)\leqslant p_1(z)$ 的 w，有

$$\Re e\left(\frac{\partial p_1}{\partial z}(z)v_1(z,w,t)\right)\leqslant\Re e\left(\frac{\partial p_1}{\partial z}(z)z\right)$$

成立. 于是由条件 (iii)，当 $p_2(w)\leqslant p_1(z)$ 时，有

$$\Re e\left\{\frac{\partial p_1(z)}{\partial z}p(z,w)\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{\Re e\left\{\frac{\partial p_1(z)}{\partial z}(z-v_1(z,w,t))\right\}}{t^2}\geqslant 0.$$

同样可证：当 $p_1(z)\leqslant p_2(w)$ 时，

$$\Re e\left\{\frac{\partial p_2(z)}{\partial w}Q(z,w)\right\}\geqslant 0.$$

引理3.3.2证毕.

引理3.3.3 若 V_1、V_2为 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$0\in V_1\subset V_2$，若 f 为 V_1上的全纯函数，且(i) $f(0)=0$；(ii) $\Re e f(z)\geqslant 0$ 在 V_1上成立，则在 V_2上 $f\equiv 0$.

证 在 V_1中取以0为中心，r 为半径的小球 $B^n(0,r)\subset V_1$. 固定一点 $z\in B^n(0,r)$，令 $g(\xi)=f(\xi z)$，$\xi\in\overline{\Delta}$，则 $g(\xi)$为$\overline{\Delta}$上的全纯函数，$g(0)=0$，$\Re e g(\xi)\geqslant 0$，当 $\xi\in\overline{\Delta}$. 故 $g(\xi)$在 $\xi\in\Delta$ 上恒为零. 因此 $f(z)\equiv 0$ 在 $B^n(0,r)$ 上成立. 根据多复变数全纯映照的唯一性定理，引理得证.

现在来证明定理3.3.1：

记正规化双全纯凸映照 f 为

$$f(z,w)=\begin{pmatrix}f_1(z,w)\\ f_2(z,w)\end{pmatrix},$$

这里 $z\in\Omega_1$，$w\in\Omega_2$，$f_1\in\mathbf{C}^{n_1}$，$f_2\in\mathbf{C}^{n_2}$均为列向量.

令

$$v_{A_1,A_2}(z,w,t)=f^{-1}\left[\frac{f(e^{iA_1t}z,e^{iA_2t}w)+f(e^{-iA_1t}z,e^{-iA_2t}w)}{2}\right],$$

这里 A_1、$A_2\in\mathbf{R}$. 于是引理3.3.2中对 $v(z,w,t)$ 要求的条件全都满足. 经过计算

$$\lim_{t\to 0}\frac{\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix}-v_{A_1,A_2}}{t^2}=\begin{pmatrix}P_{A_1,A_2}(z,w)\\ Q_{A_1,A_2}(z,w)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}A_1^2z\\ A_2^2w\end{pmatrix}+\frac{1}{2}J_f^{-1}(z,w)$$

$$\times\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,w)A_1^2z^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}(z,w)A_1A_2zw\right.$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(z,w)A_2^2w^2\Bigg], \tag{3.3.1}$$

这里

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,w)z^2=\sum_{s,t=1}^{n_1}\frac{\partial^2 f}{\partial z_s\partial z_t}(z,w)z_sz_t,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}(z,w)zw=\sum_{s=1}^{n_1}\sum_{t=1}^{n_2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_s\partial w_t}(z,w)z_sw_t, \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(z,w)w^2=\sum_{s,t=1}^{n_2}\frac{\partial^2 f}{\partial w_s\partial w_t}(z,w)w_sw_t.$$

在(3.3.1)中取 $A_1=1$, $A_2=0$, 就有

$$\begin{pmatrix}P_{1,0}(z,w)\\ Q_{1,0}(z,w)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}z\\ 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}J_f^{-1}(z,w)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,w)z^2. \tag{3.3.3}$$

特别有 $Q_{1,0}(0,w)=0$. 由引理3.3.2, 当 $p_1(z)\leqslant p_2(w)$ 时,

$$\Re e\left(\frac{\partial p_2}{\partial w}(w)Q_{1,0}(z,w)\right)\geqslant 0.$$

在 Ω_2 中固定一点 w, 记 $g(z)=\dfrac{\partial p_2}{\partial w}(w)Q_{1,0}(z,w)$. $Q_{1,0}$ 是 z 的全纯映照, 因此 $g(z)$ 在 Ω_1 上是全纯函数, $g(0)=0$ 且当 $p_1(z)\leqslant p_2(w)$ 时 $\Re e\, g(z)\geqslant 0$. 故由引理3.3.3, 当 $z\in\Omega_1$ 时, $g(z)=0$. 即有: 当 $z\in\Omega_1$, $w\in\Omega_2$ 时,

$$\frac{\partial p_2(w)}{\partial w}Q_{1,0}(z,w)\equiv 0. \tag{3.3.4}$$

由(3.3.4)式, 意味着 $Q_{1,0}(z,w)$ 是在凸域 $\{\xi\in\Omega_2: p_2(\xi)<p_2(w)\}$ 的边界点 w 的切空间之内. 由凸域的几何特性, $w+sQ_{1,0}(z,w)$ 不在凸域之内. 故有

$$p_2(w+sQ_{1,0}(z,w))\geqslant p_2(w) \tag{3.3.5}$$

对所有 $w\in\Omega_2$, $s\in\mathbf{R}$ 都成立. 由定理3.3.1的假设, 除去一个低维流形外, 可将 $p_2(w+sQ_{1,0}(z,w))$ 在 $s=0$ 处展开成幂级数:

$$p_2(w+sQ_{1,0}(z,w))=p_2(w)+\left(\frac{\partial p_2}{\partial w}(w)Q_{1,0}(z,w)+\frac{\partial p_2}{\partial \overline{w}}(w)\right.$$

$$\times \overline{Q_{1,0}(z,w)}\Big)s + \frac{1}{2!}\Big(\frac{\partial^2 p_2}{\partial w^2}(w)Q_{1,0}^2(z,w)$$

$$+ 2\frac{\partial^2 p_2}{\partial w\partial \overline{w}}(w)Q_{1,0}(z,w)\overline{Q_{1,0}(z,w)}$$

$$+ \frac{\partial^2 p_2}{\partial \overline{w}^2}(w)\overline{Q_{1,0}(z,w)^2}\Big)s^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\Big(\frac{\partial^3 p_2}{\partial w^3}(w)Q_{1,0}^3(z,w)$$

$$+ 3\frac{\partial^3 p_2}{\partial w^2\partial \overline{w}}(w)Q_{1,0}^2(z,w)\overline{Q_{1,0}(z,w)}$$

$$+ 3\frac{\partial^3 p_2}{\partial w\partial \overline{w}^2}(w)Q_{1,0}(z,w)\overline{Q_{1,0}(z,w)}^2$$

$$+ \frac{\partial^3 p_2}{\partial \overline{w}^3}(w)\overline{Q_{1,0}(z,w)}^3\Big)s^3 + \cdots.$$

要证上式右端所有 $s^k(k\geqslant 1)$ 的系数均为零. 由(3.3.4),上式 s 的系数为零. 由(3.3.5)得到 s^2 的系数为:

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial w^2}(w)Q_{1,0}^2(z,w) + 2\frac{\partial^2 p_2}{\partial w\partial \overline{w}}(w)Q_{1,0}(z,w)\overline{Q_{1,0}(z,w)} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial \overline{w}^2}(w)\overline{Q_{1,0}(z,w)}^2 \geqslant 0. \tag{3.3.6}$$

由于 $Q_{1,0}(z,w)$ 是 z、w 的全纯映照,对(3.3.4)两端求导,就得到

$$2\frac{\partial^2 p_2}{\partial w\partial \overline{w}}(w)Q_{1,0}(z,w)\overline{Q_{1,0}(z,w)} \equiv 0.$$

代入(3.3.6),就有

$$\Re e\left\{\frac{\partial^2 p_2}{\partial w^2}(w)Q_{1,0}^2(z,w)\right\} \geqslant 0.$$

再次应用引理3.3.3,导出

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial w^2}(w)Q_{1,0}^2(z,w) = 0.$$

应用(3.3.5),且对 s 可取正、负数,故 s^3 的系数必须为零. 如同证明 s^2 的系数为零那样,可证 s^4 的系数为零,……,这样就可证明:所有 $s^k(k\geqslant 1)$ 的系数均为零. 因此,

$$p_2(w+sQ_{1,0}(z,w))\equiv p_2(w)$$

对所有使 $w+sQ_{1,0}(z,w)\in\Omega_2$ 的 s 都成立. 固定 $z\in\Omega_1, w\in\Omega_2$, 若 $Q_{1,0}(z,w)\neq 0$, 则一定可以取到 $s\in\mathbf{R}$, 使得 $w+sQ_{1,0}(z,w)$ 充分靠近 Ω_2 的边界, 使 $p_2(w+sQ_{1,0}(z,w))$ 的值充分靠近1, 而大于 $p_2(w)$. 这是做得到的, 因为 Ω_2 为有界域. 因此导致矛盾. 所以只能使对所有的 $z\in\Omega_1$, $w\in\Omega_2$,

$$Q_{1,0}(z,w)\equiv 0.$$

在(3.3.1)中取 $A_1=1$, $A_2=\varepsilon>0$. 就有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}P_{1,\varepsilon}(z,w)\\Q_{1,\varepsilon}(z,w)\end{pmatrix}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}z\\\varepsilon^2 w\end{pmatrix}+\frac{1}{2}J_f^{-1}(z,w)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,w)z^2\\&\quad+2\varepsilon\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}(z,w)zw+\varepsilon^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(z,w)w^2\Big)\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}z\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}J_f^{-1}(z,w)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,w)z^2\\&\quad+\varepsilon J_f^{-1}(z,w)\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}(z,w)zw+O(\varepsilon^2)\\&=\begin{pmatrix}P_{1,0}(z,w)\\Q_{1,0}(z,w)\end{pmatrix}+\varepsilon J_f^{-1}(z,w)\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}(z,w)zw\\&\quad+O(\varepsilon^2)\\&=\begin{pmatrix}P_{1,0}(z,w)\\0\end{pmatrix}+\varepsilon J_f^{-1}(z,w)\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}(z,w)zw\\&\quad+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

记
$$\begin{pmatrix}G_1(z,w)\\G_2(z,w)\end{pmatrix}=J_f^{-1}(z,w)\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}(z,w)zw.$$

由引理3.3.2, 当 $p_1(z)\leqslant p_2(w)$ 时,

$$\Re\mathrm{e}\left\{\frac{\partial p_2(w)}{\partial w}G_2(z,w)\right\}\geqslant 0.$$

与前面的方法相仿, 可证

$$\frac{\partial p_2(w)}{\partial w}G_2(z,w)\equiv 0,$$

从而证明 $G_2(z,w)\equiv 0$. 按同样的步骤可证 $G_1(z,w)\equiv 0$. 于是

$$J_f^{-1}(z,w)\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}zw\equiv 0.$$

即
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}zw\equiv 0.$$

由(3.3.2),将 f 展开成 z、w 的 Taylor 级数,经直接计算,从上式可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial w}(z,w)\equiv 0.$$

于是

$$f(z,w)=\begin{pmatrix}f_1(z,w)\\f_2(z,w)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1(z)+h_1(w)\\h_2(z)+g_2(w)\end{pmatrix}.$$

要证 $h_1(w)\equiv 0$ 与 $h_2(z)\equiv 0$. 只证 $h_2(z)\equiv 0$. 而 $h_1(w)\equiv 0$ 的证明是相仿的.

在(3.3.3)中取 $w=0$. 由于 $Q_{1,0}(z,w)\equiv 0$,当 $z\in\Omega_1$, $w\in\Omega_2$,故有

$$\begin{pmatrix}P_{1,0}(z,0)\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}z\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}J_f^{-1}(z,0)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial z^2}(z)z^2\\\dfrac{\partial^2 h_2}{\partial z^2}(z)z^2\end{pmatrix}. \tag{3.3.7}$$

由 $f(z,w)$ 的正规化条件,将到

$$J_f(z,0)=\begin{bmatrix}J_{g_1}(z) & 0\\J_{h_2}(z) & I\end{bmatrix}.$$

因此
$$J_f^{-1}(z,0)=\begin{bmatrix}J_{g_1}^{-1}(z) & 0\\-J_{h_2}(z)J_{g_1}^{-1}(z) & I\end{bmatrix}.$$

代入(3.3.7),经计算就得

$$J_{h_2}(z)J_{g_1}^{-1}(z)\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2}(z)z^2\equiv\frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2}(z)z^2. \tag{3.3.8}$$

将 $h_2(z)$ 在 $z=0$ 处展开成幂级数,其最低次数为 k,由于正规化条件,$k\geqslant 2$. 在(3.3.8)的左端的展开式中 z 的最低次数 $\geqslant k+1$,而右端的展开式中 z 的最低次数为 k. 这就出现矛盾. 因而 $h_2(z)\equiv 0$,

这就证明了定理3.3.1.

§3.4　关于凸映照行列式偏差定理猜想的反例

若 $f(z)=z+(zA^1z',\cdots,zA^nz')+\cdots$ 为 B^n 上的正规化双全纯凸映照，$f:B^n\to\mathbf{C}^n$，这里 $A^i=(a^i_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则§3.1中(3.1.3)式对所有的 $z\in B^n$ 都成立，这里

$$C(S)=\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}a^i_{i1}\right|: f \text{ 为 } B^n \text{ 上所有正规化双全纯凸映照}\right\}.$$

这是刘太顺[3.12]推广 Barnard、FitzGerald 与龚昇[3.1]的结果所得到的. §3.1中(3.1.3)式所反映的偏差定理称之为行列式偏差定理. 在文献[3.1]中曾猜测 $C(S)=\dfrac{n+1}{2}$（见文献[3.4]中第八章§8.2问题4前一部分）.

最近 Pfaltzgraff 与 Suffridge[3.18]给出了如下的反例，说明上述猜测不成立.

他们证明了：当 $-1<x<1$ 时，映照

$$F_x(z)=\begin{pmatrix}\dfrac{z_1}{(1-xz_n)^2}\left(1+z_n\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-x}{1-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\right)\\ \vdots\\ \dfrac{z_{n-1}}{(1-xz_n)^2}\left(1+z_n\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-x}{1-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\right)\\ \dfrac{z_n}{1-xz_n}\end{pmatrix}=z+\begin{pmatrix}z'A^1z\\ \vdots\\ \vdots\\ z'A^nz\end{pmatrix}+\cdots \tag{3.4.1}$$

是 B^n 上的一个正规化双全纯凸映照，这里 z 与 $F_x(z)$ 均为列向量，$A^i=(a^i_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ $(i=1,\cdots,n)$.

由(3.4.1)即可得到 $a_{jn}^j = x + \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - x}{2\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)}$ 当 $1 \leqslant j \leqslant n-1$ 以及 $a_{nn}^n = x$. 于是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jn}^j = nx + \frac{n-1}{2} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - x}{1 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}}.$$

记 $h(x) = \left| nx + \dfrac{n-1}{2} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - x}{1 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}} \right|$，于是 $h(x)$ 在 $-1 < x < 1$ 中的 $x = \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2(n-1)}}{2\sqrt{n}}$ 处取极大值. 因此当 $n \geqslant 2$ 时，

$$C(S) \geqslant h\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2(n-1)}}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{3n-1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2n(n-1)}$$
$$> \frac{n+1}{2}.$$

于是，当 $x = \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2(n-1)}}{2\sqrt{n}}$ 时，由(3.4.1)所定义的 $F_x(z)$ 就是猜测的一个反例.

在这一节中，只证明当 $n=2$时，(3.4.1)确是 B^n 上的一个正规化双全纯凸映照. 至于一般的情形，证明是相仿的，在此从略.

显然，映照 $G(z) = \begin{pmatrix} z_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} z_1 z_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ 是 B^2上的一个正规化双全纯映照. 可以证明 $G(z)$在 B^2上是凸的. 由 $G(z)$ 的定义，可有

$$J_G(z) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{z_2}{\sqrt{2}}, & \dfrac{z_1}{\sqrt{2}} \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_G^{-1}(z)=\begin{pmatrix}\left(1+\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{-1}, & -\frac{z_1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{-1}\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

以及
$$\bar{z}'J_G(z)=\left(\frac{z_1}{1+\frac{z_2}{\sqrt{2}}},*\right),$$

这里 $z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$，* 表示另一项可不必写出. 由 § 3.1中(3.1.6)式知

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}z^2}\alpha^2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\,\alpha_1\alpha_2\\0\end{pmatrix},$$

这里 $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^2$为一列向量，且$|\alpha|=1$及 $\mathfrak{Re}\{\bar{z}'\alpha\}=0$.

于是有

$$\mathfrak{Re}\left\{\bar{z}'J_G^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}z^2}\alpha^2\right\}=\mathfrak{Re}\left\{\frac{\sqrt{2}\,\bar{z}_1\alpha_1\alpha_2}{1+\frac{z_2}{\sqrt{2}}}\right\}\leqslant 2|\alpha_1||\alpha_2|\frac{|z_1|/\sqrt{2}}{1-\frac{|z_2|}{\sqrt{2}}}$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}-t^2}}{1-t}=1.$$

这是因为$|\alpha|=1$，$z\in B^2$ 以及 $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}-t^2}}{1-t}$在 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ 中的 $t=\frac{1}{2}$处取极大值.

由 Kikuchi 的凸性判别准则(3.1.5)可知 $G(z)$在 B^2上是凸的.

若$-1<x<1$，则 $\varphi(z)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{1-x^2}z_1}{1-xz_2}\\\frac{z_2-x}{1-xz_2}\end{pmatrix}\in\mathrm{Aut}(B^2)$，这将

$\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$映为原点. 映照 $G[\varphi(z)]-G[\varphi(0)]$ 在 B^2 上仍是凸的，这等于

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1-x^2}z_1}{(1-xz_2)^2}\left(1+z_2\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-x}{1-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\right)\\ \dfrac{(1-x^2)z_2}{1-xz_2}\end{pmatrix},$$

经过正规化后成为

$$F_x(z)=\begin{pmatrix}\dfrac{z_1}{(1-xz_2)^2}\left(1+z_2\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-x}{1-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\right)\\ \dfrac{z_2}{1-xz_2}\end{pmatrix}=z+\begin{pmatrix}z'A^1z\\z'A^2z\end{pmatrix}+\cdots,\tag{3.4.2}$$

当 $-1<x<1$ 时，(3,4,2)是 B^2 上一个正规化双全纯凸映照.

在(3.4.2)中取 $x=\sqrt{2}-\frac{1}{2}=0.914\cdots$，则

$$a_{22}^2+a_{12}^1=x+\left(x+\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-x}{1-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{2}-2$$

$$=1.535\cdots>\frac{3}{2}.$$

故(3.4.2)中 $x=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ 时确为猜测的反例.

§3.5 有界凸圆型域上双全纯凸映照的增长定理与偏差定理

在文献[3.4]的第四章中，讨论了全纯凸映照的增长定理. 当

区域是球或典型域时给出了精确的估计；当区域是 B_p 时，只给出了上界的估计.

最近，刘太顺与任广斌[3.15]给出了如下的十分一般的增长定理.

定理3.5.1　若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界凸圆型域，其 Minkowski 泛函 $p(z)$ 除去一个低维流形外是一阶连续可微的. 若 $f(z):\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为 Ω 上正规化双全纯凸映照，则

$$\frac{p(z)}{1+p(z)}\leqslant p(f(z))\leqslant\frac{p(z)}{1-p(z)}\tag{3.5.1}$$

以及

$$\frac{|z|}{1+p(z)}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-p(z)}\tag{3.5.2}$$

成立，且(3.5.1)与(3.5.2)相互等价，即从一个不等式可以导出另一个不等式.

由(3.5.2)即可推出

$$f(\Omega)\supset\frac{1}{2}\Omega.\tag{3.5.3}$$

若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$，且 $0\in\Omega$，如果 Ω 不是凸域，一般来讲，在 Ω 上不存在凸全纯映照，所以定理3.5.1是一条十分广泛的定理. 球、B_p、D_p 及有界对称域的 Harish-Chandra 实现都是有界凸圆型域，所以(3.5.1)、(3.5.2)及(3.5.3)都成立.

下面证明定理3.5.1. 先证明两条引理：

引理3.5.1　若 $\Delta=\{\zeta\in\mathbf{C}:|\zeta|<1\}$ 是单位圆盘，$g:\Delta\to\Delta$ 是 Δ 上全纯函数，而 $\zeta=1$ 不是 $g(\zeta)$ 的一个奇点，且 $g(1)=1$，$g(0)=0$，则 $g'(1)\geqslant1$.

证　从全纯函数的导数的几何意义，即得 $g'(1)\geqslant0$. 于是由 Schwarz 引理，有

$$\begin{aligned}g'(1)=|g'(1)|&=\lim_{\substack{x\to1\\0<x<1}}\left|\frac{g(x)-1}{x-1}\right|\geqslant\lim_{\substack{x\to1\\0<x<1}}\frac{1-|g(x)|}{1-x}\\&\geqslant\lim_{\substack{x\to1\\0<x<1}}\frac{1-x}{1-x}=1.\end{aligned}$$

引理3.5.2 若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为一个有界凸圆型域，其 Minkowski 泛函 $p(z)$ 除去一个低维流形外，$p(z)\in\mathbf{C}^1$. 若 $f(z)$是$\overline{\Omega}$上的一个正规化双全纯凸映照，则

$$p(z)(1-p(z))\leqslant 2\Re e\left\{\frac{\partial p}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)\right\}\leqslant p(z)(1+p(z)) \tag{3.5.4}$$

对所有 $z\in\Omega$ 都成立.

证 由(3.1.13)可得关于全纯映照是凸映照的一个判别准则(参阅文献[3.21])

$$\Re e\left\{\frac{\partial p(z)}{\partial z}J_f^{-1}(z)[f(z)-f(\zeta z)]\right\}\geqslant 0$$

对所有 $z\neq 0$，$z\in\Omega$，$\zeta\in\overline{\Delta}$ 都成立，令

$$h(z)=\frac{\partial p(z)}{\partial z}J_f^{-1}(z)f(z),$$

则由星形映照的判别准则 $\Re e h(z)\geqslant 0$，令

$$g(\zeta)=\frac{\overline{h(z)}}{h(z)}\cdot\frac{\dfrac{\partial p}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(\zeta z)}{2\Re e h(z)-\dfrac{\partial p}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(\zeta z)},$$

这里 $\zeta\in\overline{\Delta}$，则 $g:\Delta\to\Delta$ 是 ζ 在 Δ 上的全纯函数，且 $g(0)=0,\zeta=1$ 不是 $g(\zeta)$的奇点，$g(1)=1$. 由引理3.5.1，可得

$$1\leqslant g'(1)=\frac{\overline{h(z)}}{h(z)}\cdot\frac{\overline{h(z)}\dfrac{\partial p}{\partial z}(z)z+h(z)\dfrac{\partial p}{\partial z}(z)z}{(\overline{h(z)})^2}$$

$$=\frac{2\dfrac{\partial p}{\partial z}(z)z\ \Re e\ h(z)}{|h(z)|^2}. \tag{3.5.5}$$

于是 $\dfrac{\partial p}{\partial z}(z)z$ 是一个实数，而由 $p(z)$ 的定义可知

$$2\frac{\partial p}{\partial z}(z)z=2\Re e\left\{\frac{\partial p}{\partial z}(z)z\right\}=p(z),$$

由(3.5.5)，即得

$$p(z)\Re e h(z)\geqslant |h(z)|^2.$$

此即

$$\left|h(z)-\frac{p(z)}{2}\right| \leqslant \frac{p(z)}{2}.$$

由 $h(z)$ 的定义，这就是

$$\left|2\frac{\partial p(z)}{\partial z}J_f^{-1}(z)f(z)-p(z)\right| \leqslant p(z). \qquad (3.5.6)$$

令 z 趋于边界点 $z^* \in \partial\Omega$，则(3.5.6)成为

$$\left|2\frac{\partial p(z^*)}{\partial z}J_f^{-1}(z^*)f(z^*)-1\right| \leqslant 1. \qquad (3.5.7)$$

由于假设 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯，所以(3.5.7)是有意义的，在(3.5.7)中以 $e^{i\theta}z^*$ 替代 z^*，则得

$$\left|2\frac{\partial p(z^*)}{\partial z}\frac{J_f^{-1}(e^{i\theta}z^*)f(e^{i\theta}z^*)}{e^{i\theta}}-1\right| \leqslant 1.$$

由单复变数全纯函数的极大值原理，不等式

$$\left|2\frac{\partial p(z^*)}{\partial z}\frac{J_f^{-1}(\zeta z^*)f(\zeta z^*)}{\zeta}-1\right| \leqslant 1.$$

当 $\zeta \in \Delta$ 时都成立. 由 Schwarz 引理，有

$$\left|2\frac{\partial p(z^*)}{\partial z}\cdot\frac{J_f^{-1}(\zeta z^*)f(\zeta z^*)}{\zeta}-1\right| \leqslant |\zeta| \qquad (3.5.8)$$

对所有 $\zeta \in \Delta$ 都成立. 这是因为

$$l(\zeta)=2\frac{\partial p(z^*)}{\partial z}\cdot\frac{J_f^{-1}(\zeta z^*)f(\zeta z^*)}{\zeta}-1$$

是 Δ 上的全纯函数，且 $l(0)=0$.

对任一 $z \in \Omega$，$z \neq 0$，令 $z^*=\frac{z}{p(z)}$，则 $z^* \in \partial\Omega$，在(3.5.8)中取 $z^*=\frac{z}{p(z)}$，$\zeta=p(z)$，就可得到

$$\left|2\frac{\partial p}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)-p(z)\right| \leqslant (p(z))^2,$$

而由此即可以导出(3.5.4).

有了这两条引理，就可以证明定理3.5.1了. 不妨假设 $f(z)$在 $\overline{\Omega}$上全纯，否则，只要考虑 $\frac{1}{s}f(sz)$，$0<s<1$，即可，然后应用常规的极限过程即可.

令 $z(t)=f^{-1}[tf(z)]$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}J_f^{-1}(z(t))f(z(t))$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p(z(t))}{\mathrm{d}t}&=2\Re e\left\{\frac{\partial p}{\partial z}(z(t))\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right\}\\&=\frac{2}{t}\Re e\left\{\frac{\partial p}{\partial z}(z(t))J_f^{-1}(z(t))f(z(t))\right\}\end{aligned}$$

成立. 于是由引理 3.5.2，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}p(z(t))(1-p(z(t)))\leqslant&\frac{\mathrm{d}p(z(t))}{\mathrm{d}t}\\&\leqslant\frac{1}{t}p(z(t))(1+p(z(t))).\end{aligned}\tag{3.5.9}$$

将(3.5.9)两端对 t 从 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$到 1 积分，就得到

$$\frac{p(z)}{1+p(z)}\leqslant\frac{p(z(\varepsilon))}{\varepsilon(1+p(z(\varepsilon)))}\tag{3.5.10}$$

以及

$$\frac{p(z)}{1-p(z)}\geqslant\frac{p(z(\varepsilon))}{\varepsilon(1-p(z(\varepsilon)))}.$$

令 $\varepsilon\to 0$，就得到(3.5.1). 利用文献[3.4]中第四章的方法，即可证明(3.5.1)与(3.5.2)是等价的.

在定理3.5.1的基础上，刘太顺与龚昇[3.5]将球上双全纯凸映照的矩阵形式的偏差定理(3.1.4)推广到了有界凸圆型域上. 这里用的是 Carathéodory 度量与 Kobayashi 度量. 我们所采用的是 Krantz 书[3.10]中的记号.

定义3.5.1 若 $\Omega\subseteq\mathbf{C}^n$ 为域，定义 Ω 上的 Carathéodory 度量的无穷小形式(或称之为 Carathéodory 半范数)为 F_c：$\Omega\times\mathbf{C}^n\to$

$\mathbf{R}$，而 $F_c(z,\xi)=\sup\limits_{\substack{f\in B^n(\Omega)\\ f(z)=0}}|f_*(\xi)|=\sup\limits_{\substack{f\in B^n(\Omega)\\ f(z)=0}}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\xi_j\right|$，这里 $f\in B^n(\Omega)$ 表示 f 为 Ω 上全纯映照，将 Ω 映入到 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球 B^n 中.

定义3.5.2 若 $\Omega\subseteq\mathbf{C}^n$ 为域，定义 Ω 上的 Kobayashi 度量的无穷小形式(或称之为 Kobayashi 半范数)为 F_K: $\Omega\times\mathbf{C}^n\to\mathbf{R}$，而

$$F_K(z,\xi)=\sup_{\substack{f\in\Omega(B^n)\\ f(0)=z}}\left\{\alpha;\alpha>0,J_f(0)e_1=\frac{\xi}{\alpha}\right\},$$

这里 $f\in\Omega(B^n)$ 表示 f 为 $\mathbf{C}^n$ 中单位球 B^n 上的全纯映照，将 B^n 映入到 Ω 中，$e_1=(1,0,\cdots,0)'\in\mathbf{C}^n$.

于是有如下的结果[3.5]：

定理3.5.2 若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 是一个有界凸圆型域，其 Minkowski 泛函 $p(z)$ 在 Ω 上除去一个低维流形外是一阶连续可微的. 若 $f(z)$: $\Omega\to\mathbf{C}^n$ 为 Ω 上正规化双全纯凸映照，则对每个 $z\in\Omega$ 及列向量 $\xi\in\mathbf{C}^n$，不等式

$$\frac{1-p(z)}{1+p(z)}F(z,\xi)\leqslant p(J_f(z)\xi)\leqslant\frac{1+p(z)}{1-p(z)}F(z,\xi) \tag{3.5.11}$$

成立，这里

$$F(z,\xi)=F_C(z,\xi)=F_K(z,\xi). \tag{3.5.12}$$

当 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球时，

$$F_C^2(z,\xi)=F_K^2(z,\xi)=\frac{|\xi|^2}{1-|z|^2}+\frac{\xi\bar{z}'z\bar{\xi}'}{(1-|z|^2)^2},$$

于是(3.5.11)就是(3.1.4). 因此定理3.5.2推广了余其煌、王世坤与龚昇[3.6]的结果(参阅文献[3.4]中第三章§3.1).

现在来证明定理3.5.2.

不妨假设 $f(z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 的邻域上双全纯，否则，考虑 $\frac{1}{r}f(rz)$，$0<r<1$，再令 $r\to1$ 即可.

固定 Ω 中任一点 $z(\neq0)$，作一直线，从 $f(z)$ 出发，经过原点交 $f(\Omega)$ 的边界于点 P. 于是在 $\partial\Omega$ 上存在一点 z^*，使得 $f(z^*)=P$. 由于 $f(z)$、O 及 $f(z^*)$ 在同一直线上，且 O 在 $f(z)$ 及 $f(z^*)$ 的

中间,故存在一个实数 $\lambda\in(0,1)$,使得

$$\lambda f(z)+(1-\lambda)f(z^*)=0$$

成立.由 $p(z)$ 的定义,可得

$$\lambda p(f(z))=(1-\lambda)p(f(z^*)).$$

由定理3.5.1,即有

$$\frac{\lambda p(z)}{1-\lambda p(z)}\geqslant\lambda p(f(z))=(1-\lambda)p(f(z^*))\geqslant\frac{1}{2}(1-\lambda).$$

因此

$$\lambda\geqslant\frac{1-p(z)}{1+p(z)}. \tag{3.5.13}$$

令

$$h(w)=f^{-1}[\lambda f(w)+(1-\lambda)f(z^*)].$$

由于 f 是 Ω 上的凸映照,故当 $w\in\Omega$ 时,$h(w)$是有意义的,且 $h(\Omega)\subset\Omega$ 及 $h(z)=0$.

由于 Carathéodory 度量的无穷小形式具有收缩性质(Contraction property),即:若 M、N 为两个具有相同维数 n 的流形,$f:M\to N$,则对任意的 $z\in M$ 及 $\xi\in\mathbf{C}^n$,有

$$F_C^N(f(z),J_f(z)\xi)\leqslant F_C^M(z,\xi),$$

这里 F_C^M、F_C^N 分别表示 M 与 N 上的 Carathéodory 度量的无穷小形式(参阅文献[3.10]和[3.19]).

由于 $h:\Omega\to\Omega$,而 $h(z)=0$,故有

$$F_C(0,J_h(z)\xi)\leqslant F_C(z,\xi).$$

由 h 的定义,可知 $J_h(z)=\lambda J_f(z)$.因此

$$\lambda F_C(0,J_f(z)\xi)\leqslant F_C(z,\xi).$$

应用(3.5.13)于上式.就有(3.5.11)的右端的不等式.

现在来证明(3.5.11)的左端的不等式:

固定 Ω 中任一点 $z(\neq 0)$,作一直线从原点出发,经过 $f(z)$,交 $f(\Omega)$的边界于点 Q,于是在 $\partial\Omega$ 上存在一点$\tilde{z}$,使得 $f(\tilde{z})=Q$.由于O、$f(z)$及 $f(\tilde{z})$在同一直线上,且 $f(z)$在 O 与 $f(\tilde{z})$的中间,故存在一个实数 $\mu\in(0,1)$,使得 $f(z)=\mu f(\tilde{z})$ 成立.于是

$$z=\tilde{z}(\mu)=f^{-1}(\mu f(\tilde{z})).$$

由(3.5.10)得到

$$\frac{1}{2}=\frac{p(\tilde{z})}{1+p(\tilde{z})}\leqslant\frac{p(\tilde{z}\ (\mu))}{\mu(1+p(\tilde{z}\ (\mu)))}=\frac{p(z)}{\mu(1+p(z))},$$

因此 $\mu\leqslant\frac{2p(z)}{1+p(z)}$,于是

$$1-\mu\geqslant\frac{1-p(z)}{1+p(z)}. \tag{3.5.14}$$

令 $H(W)=f^{-1}[(1-\mu)f(w)+\mu f(\tilde{z})]$,由于 f 是凸映照,故当 $w\in\Omega$ 时, $H(w)$ 是有意义的,且 $H(\Omega)\subset\Omega$ 及 $H(0)=z$.

由于 Carathéodory 度量的无穷小形式具有收缩性质,故对任意 $z\in\Omega$, $\eta\in\mathbf{C}^n$,有

$$F_C(z,J_H(0)\eta)\leqslant F_C(0,\eta)$$

成立.由 H 的定义,可知 $J_H(0)=J_f^{-1}(z)(1-\mu)$, 因此由 F_C 的定义,即得

$$(1-\mu)F_C(z,J_f^{-1}(z)\eta)\leqslant F_C(0,\eta).$$

令 $\eta=J_f(z)\xi$, $\xi\in\mathbf{C}^n$,上式即为

$$(1-\mu)F_C(z,\xi)\leqslant F_C(0,J_f(z)\xi).$$

应用(3.5.14)于上式,就得(3.5.11)的左端不等式.

由 Lempert 的定理[3.23],可知道:当 Ω 为凸域时,

$$F_C(z,\xi)=F_K(z,\xi),$$

记作 $F(z,\xi)$.此外,由文献[3.24]可知 $F(0,\xi)=p(\xi)$.这就证明了定理3.5.2.

定理3.5.1基本上回答了文献[3.4]中第八章§8.3中的问题8(1)、(2);定理3.5.2建立了用 Carathéodory 度量的无穷小形式及 Kobayashi 度量的无穷小形式表达的偏差定理,一般来说这不能写成二次型的形式.

§3.6 有界星形圆型域上星形映照的增长定理

为了证明定理3.1.4,先证明如下定理:

定理3.6.1 若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界星形圆型域,其 Minkowski 泛

函 $p(z)$除去一个低维流形外，是一次连续可微的. 若 $f(z):\Omega\to\mathbf{C}^n$为正规化双全纯星形映照，则对所有的 $z\in\Omega$，有

$$\Re\mathrm{e}\left\{\frac{\partial p(z)}{\partial z}J_f^{-1}(z)f(z)\right\}\geqslant 0 \tag{3.1.13}$$

成立. 且有：对所有 $z\in\Omega$，有

$$p(z)\frac{1+p(z)}{1-p(z)}\geqslant 2\Re\mathrm{e}\left\{\frac{\partial p(z)}{\partial z}J_f^{-1}(z)f(z)\right\}\geqslant p(z)\frac{1-p(z)}{1+p(z)} \tag{3.6.1}$$

成立，这里 $f(z)$为列向量，$\dfrac{\partial p}{\partial z}(z)=\left(\dfrac{\partial p}{\partial z_1}(z),\cdots,\dfrac{\partial p}{\partial z_n}(z)\right)$.

证 若 $0\neq z\in\Omega$，记 $z_0=\dfrac{z}{p(z)}$，则 $z_0\in\partial\Omega$.

分两种情形来讨论 z_0：

1) z_0为 Ω 的非本性边界点(non-essential boundary point)，也就是说：$f(z)$和 $J_f^{-1}(z)$都可全纯开拓到 z_0的一个邻域中. 因而对任意固定的 $r\in(0,1)$，$f^{-1}((1-r)f(z))$也可全纯开拓到z_0的一个邻域中. 经过全纯开拓，$f(z_0)$是有意义的，且 $f^{-1}((1-r)f(z_0))\in\overline{\Omega}$，即有：当 $0<r<1$ 时，

$$p(f^{-1}((1-r)f(z_0)))\leqslant 1. \tag{3.6.2}$$

将 p 在 $r=0$ 处展开成 r 的幂级数. 由于

$$f^{-1}((1-r)f(z_0))=z_0-J_f^{-1}(z_0)f(z_0)r+O(r^2),$$

所以由(3.6.2)，有

$$p(z_0)-2\Re\mathrm{e}\left\{\frac{\partial p}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(z_0)f(z_0)\right\}r+O(r^2)\leqslant 1.$$

根据 p 的定义，$p(z_0)=1$，由上式即得：

$$\Re\mathrm{e}\left\{\frac{\partial p}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(z_0)f(z_0)\right\}\geqslant 0.$$

由于 Ω 为圆型域，对于每个 $\theta\in\mathbf{R}$，$e^{i\theta}z_0$ 也是 Ω 的非本性边界点. 于是也有

$$\Re\mathrm{e}\left\{\frac{\partial p}{\partial z}(e^{i\theta}z_0)J_f^{-1}(e^{i\theta}z_0)f(e^{i\theta}z_0)\right\}\geqslant 0. \tag{3.6.3}$$

由 $p(z)$的定义知道：若 $t\in\mathbf{C}$，则 $p(tz)=|t|p(t)$，由此即得

$$\frac{\partial p}{\partial z}(e^{i\theta}z) = e^{-i\theta}\frac{\partial p}{\partial z}(z).$$

记 $$h(\zeta) = \frac{\partial p}{\partial z}(z_0)J_f^{-1}(\zeta z_0)f(\zeta z_0)\zeta^{-1},\ \zeta \in \overline{\Delta}.$$

这里 Δ 为 $\mathbf{C}$ 中单位圆盘，于是(3.6.3)就成为 $\Re h(e^{i\theta})\geqslant 0$. 由于 $f(z)$是 Ω 上的正规化双全纯星形映照，故 $h(\zeta)$是$\overline{\Delta}$上的全纯函数的实部，即$\overline{\Delta}$上的调和函数，因此 $\Re h(\zeta)\geqslant 0$当 $\zeta\in\overline{\Delta}$时成立. 取 $\zeta=p(z)$，由于 $\frac{\partial p(\lambda z)}{\partial z}=\lambda\frac{\partial p(z)}{\partial z}$ 当 $\lambda\in[0,\infty)$ 时成立，则由 $\Re h(\zeta)\geqslant 0$ 立得(3.1.13).

2) z_0为 Ω 的本性边界(essential boundary point). 由 Krantz 的定理3.4.5[3.10]，在 $\partial\Omega$ 上有 z_0点的一个邻域包有本性边界点. 在 $\partial\Omega$ 上选取 z_0 点的一个小邻域，将其中的每一点都与原点相联，组成 $\mathbf{C}^n$ 中的一个锥形域 $\widetilde{\Omega}$，这是一个全纯域.

对每个固定的 $t\in(0,1)$，$r\in[0,1]$，记

$$\varphi_{r,t}(\zeta) = \frac{f^{-1}((1-r)f(t\zeta z_0))}{\zeta},\ \zeta \in \overline{\Delta}.$$

则 $\varphi_{r,t}(\partial\Delta)\subset\subset\Omega$，且当 r 充分小时，有

$$\varphi_{r,t}(\zeta) = tz_0 + O(r).$$

也就是说：$\varphi_{r,t}(\zeta)$与射线 tz_0，即锥形域$\widetilde{\Omega}$的中心射线很接近. 于是取 δ 充分小，对每一个 $t\in(0,1)$，$r\in[0,\delta]$，$\varphi_{r,t}(\partial\Delta)\subset\subset\widetilde{\Omega}$. 于是如同证明引理3.3.1中那样，由全纯域上的解析圆盘的性质(见文献[3.10]中的定理3.3.5)，可以证明：对每一个 $t\in(0,1)$，$r\in[0,\delta]$，有 $\varphi_{r,t}(\overline{\Delta})\subseteq\widetilde{\Omega}$. 于是：当 $|\zeta|<1$时，$p\left(\frac{f^{-1}((1-r)f(t\zeta z_0))}{\zeta}\right)\leqslant 1$.
令 $t\to 1$，由 $p(z)$的性质，即得：当 $|\zeta|<1$ 时，

$$p(f^{-1}((1-r)f(\zeta z_0))) \leqslant |\zeta|.$$

取 $\zeta=p(z)$，上式即为

$$p(f^{-1}((1-r)f(z))) \leqslant p(z).$$

上式左端在 $r=0$ 处对 r 展开成幂级数，于是

$$p(z) - 2\Re\left\{\frac{\partial p}{\partial z}(z)J_f^{-1}(z)f(z)r\right\} + O(r^2) \leqslant p(z).$$

即得(3.1.13).

这就证明了(3.1.13)式成立.

令

$$g(\zeta)=2\frac{\partial p(z_0)}{\partial z}\cdot\frac{J_f^{-1}(\zeta z_0)f(\zeta z_0)}{\zeta},\ \zeta\in\Delta.$$

则已知 $\Re e\, g(\zeta)=2h(\zeta)\geqslant 0$. 而 $g(0)=2\frac{\partial p(z_0)}{\partial z}z_0$. 现在来验证: $\Re e\, g(0)=1$, 当 $z_0\in\partial\Omega$.

由 $p(z)$ 的定义知: 若 $t\in \boldsymbol{R}_+$, 则 $p(tz)=tp(z)$. 在上式两端对 t 求导, 记 $w=tz$, 即得

$$2p(w)\Re e\,\frac{\partial p(w)}{\partial w}w=p^2(w),$$

即

$$2\Re e\left\{\frac{\partial p(w)}{\partial w}w\right\}=p(w).$$

令 $w\to z_0\in\partial\Omega$, 即有 $2\Re e\left\{\frac{\partial p(z_0)}{\partial z}z_0\right\}=1$, 故 $\Re e\, g(0)=1$.

又由于: 若 $\zeta=|\zeta|e^{i\theta}$, 则

$$\frac{\partial p}{\partial z}(\zeta z_0)=\frac{\partial p}{\partial z}(z_0)e^{-i\theta},$$

故

$$g(\zeta)=\frac{2\frac{\partial p}{\partial z}(\zeta z_0)J_f^{-1}(\zeta z_0)f(\zeta z_0)}{|\zeta|}.$$

由调和函数的 Harnark 定理, 就得到

$$|\zeta|\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\geqslant 2\Re e\left(\frac{\partial p}{\partial z}(\zeta z_0)J_f^{-1}(\zeta z_0)f(\zeta z_0)\right)\geqslant|\zeta|\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}.$$

取 $\zeta=p(z)$, 就得到(3.6.1).

下而应用(3.6.1)来证明定理3.1.4.

记

$$z(t)=f^{-1}(tf(z)),\ t\in(0,1).$$

$z(t)$ 将(0,1)映为 Ω 中一条曲线, 成为 $f(\Omega)$ 中连接 O 及 $f(z)$ 的直线用 f^{-1} 映照后的象, 即可证明:

(1) $f(z(t))=tf(z)$;

(2) $J_{f^{-1}}(tf(z))=J_f^{-1}(z(t))$；

(3) $\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t}J_f^{-1}(z(t))f(z(t))$；

(4) $z(t)=tf(z)+O(t^2)$.

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p(z(t))}{\mathrm{d}t}&=2\Re\left(\frac{\partial p}{\partial z}(z(t))\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\frac{2}{t}\Re\left(\frac{\partial p}{\partial z}(z(t))J_f^{-1}(z(t))f(z(t))\right).\end{aligned}$$

由(3.6.1)，得到

$$\frac{1}{t}p(z(t))\frac{1+p(z(t))}{1-p(z(t))}\geqslant\frac{\mathrm{d}p(z(t))}{\mathrm{d}t}\geqslant\frac{1}{t}p(z(t))\frac{1-p(z(t))}{1+p(z(t))}.$$

由上面右端不等式，就可导出：

$$\int_\varepsilon^1\frac{(1+p(z(t))\mathrm{d}p(z(t)))}{p(z(t))(1-p(z(t)))}\geqslant\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

这里 $\varepsilon>0$. 经过计算，这就是

$$\log\frac{1-p(z)}{(1-p(z))^2}-\log\frac{p(z(\varepsilon))}{(1-p(z(\varepsilon)))^2}\geqslant\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

即

$$\frac{p(z)}{(1-p(z))^2}\geqslant\frac{p(z(\varepsilon))}{(1-p(z(\varepsilon)))^2\varepsilon}.$$

让 $\varepsilon\to0$，由 $p(z)$ 的性质及 $z(\varepsilon)=\varepsilon f(z)+O(\varepsilon^2)$，就有

$$\frac{p(z)}{(1-p(z))^2}\geqslant p(f(z)).$$

这就证明了(3.1.10)右端的不等式. 同样可以证明(3.1.10)左端的不等式.

再来证与(3.1.10)等价的(3.1.11)：

令 $r=|z|$，则

$$\mathrm{d}r=\frac{1}{2r}\sum_{i=1}^n(\bar{z}_i\mathrm{d}z_i+z_i\overline{\mathrm{d}z_i}),$$

$$\mathrm{d}p(z)=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial p}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i+\frac{\partial p}{\partial\bar{z}_i}\overline{\mathrm{d}z_i}\right).$$

于是

$$\langle \mathrm{d}p, \mathrm{d}r \rangle = \frac{1}{r} 2\Re e \frac{\mathrm{d}p}{\partial z} z = \frac{p}{r},$$

这里 $\langle , \rangle$ 为 Hermifian 内积,另一方面

$$\langle \mathrm{d}p, \mathrm{d}r \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r, \mathrm{d}r \right\rangle = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} \langle \mathrm{d}r, \mathrm{d}r \rangle = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}.$$

因此 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{p}{r}$,此即 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}r}{r}$,将此式两端积分从 $f(z)$ 到 $f(\varepsilon z)$,就有 $\frac{p(f(z))}{p(f(\varepsilon z))} = \frac{|f(z)|}{|f(\varepsilon z)|}$.

由于(3.1.10)成立以及 $p(f(z)) = |f(z)| \frac{p(f(\varepsilon z))}{|f(\varepsilon z)|}$,得到

$$\frac{|f(\varepsilon z)|}{p(f(\varepsilon z))} \cdot \frac{p(z)}{(1+p(z))^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|f(\varepsilon z)|}{p(f(\varepsilon z))} \cdot \frac{p(z)}{(1-p(z))^2}.$$

而 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{|f(\varepsilon z)| p(z)}{p(f(\varepsilon z))} = |z|$,这就得到(3.1.11).

反过来,如果(3.1.11)成立,那么应用 $|f(z)| = |f(\varepsilon z)| \times \frac{p(f(z))}{p(f(\varepsilon z))}$,就可得到(3.1.10),故两式等价.

定理3.1.4证毕.

§ 3.7　r-域上全纯映照成为星形映照的判别准则

在上一节中,刘太顺与任广斌[3.14]证明了:若 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 为有界星形圆型域,f 为 Ω 上正规化双全纯星形映照,则(3.1.13)成立.在这一节中要证明(3.1.13)也是局部双全纯映照成为星形映照的充分条件(见文献[3.7]),而这只是文献[3.4]中定理6.3.1的一个简单的推论.

定理3.7.1　若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界圆型星形域,其 Minkowski 泛函 $p(z)$ 在 Ω 上除去一个低维流形外,是一阶连续可微的.若 $f(z): \Omega \to \mathbf{C}^n$ 为 Ω 上局部双全纯映照,则 $f(z)$ 成为 Ω 上双全纯星形映照当且仅当(3.1.13)成立.

回顾文献[3.4]中第六章中定义 r-域如下:

若 $z\in \mathbf{C}^n$，以 $r(z)$ 作为定义函数，$r(z)$ 为从 Ω 到 $R^+ +\{0\}$ 的连续竭尽函数，且只有一个零点，这样的域称为 r-域.

文献[3.4]中第六章 § 6.3的定理6.3.1可叙述为：

定理3.7.2　若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的 r-域，f 为 Ω 到 $\mathbf{C}^n$ 的局部双全纯映照，满足条件：

1. 有 $z_0\in\Omega$，使得 $r(z_0)=0$，且 $f(z_0)=0$，而当 $z\in\Omega\setminus\{z_0\}$ 时，$r(z)>0$；

2. 对任意 $z\in\Omega$，存在 z 的邻域 U_z，使得 f 在 U_z 上是双全纯的，且对于任意 $t\in[0,1]$，$z(t)$ 为 U_z 中满足 $f(z(t))=(1-t)f(z)\in f(U_z)$ 的点，就有 $r(z(t))\leqslant r(z)$.

则 f 在 Ω 上相对于原点而言，是双全纯星形映照.

如果除了 Ω 中一个低维流形外，$r(z)$ 是一阶连续可微的，则条件 2 可以写成：

$$2'.\ \langle f^{-1*}\mathrm{d}r,\mathrm{d}\rho\rangle|_{w=f(z)}\geqslant 0. \tag{3.7.1}$$

这里 $\rho(w)=\left(\sum_{i=1}^{n}|w_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$w=(w_1,\cdots,w_n)$，$f^{-1*}$ 表示 f^{-1} 在 U_z 上的拉回(Pullback)，$\langle,\rangle$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中的 Hermitian 内积.

在定理3.7.2中取 $r(z)=\dfrac{p(z)}{1-p(z)}$，$z_0=0$，式中 $p(z)$ 为定理3.7.1中的 Minkowski 泛函. 这时条件(3.7.1)就是(3.1.13)，因此 $r(z)$ 满足定理3.7.2中的条件1及2′. 这就证明了定理3.7.1中的充分性部分.

定理3.7.2给出了 r-域上局部双全纯映照成为双全纯星形映照的充分条件，下面的定理给出必要条件(见文献[3.7])：

定理3.7.3　若 Ω 为 $\mathbf{C}^n$ 中的 r-域，f 为 Ω 到 $\mathbf{C}^n$ 的双全纯星形映照，满足条件：

1. 有 $z_0\in\Omega$，使得 $r(z_0)=0$ 且 $f(z_0)=0$，而且当 $z\in\Omega\setminus\{z_0\}$ 时，$r(z)>0$；

2. 对任意全纯映照 $g:\Omega\to\Omega$，且 $g(z_0)=z_0$，恒有收缩性质，即

$$r(z)\geqslant r(g(z)). \tag{3.7.2}$$

于是对于任意 $z\in\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$f(z(t))=(1-t)f(z)$，必有

$$r(z) \geqslant r(z(t)). \qquad (3.7.3)$$

如果除了 Ω 的一个低维流形外，$r(z)$是一阶连续可微的，则(3.7.1)成立.

证 设 $z\in\Omega$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$. 令 $z_\lambda=f^{-1}(\lambda f(z))$，由(3.7.2)就有 $r(z)\geqslant r(z_\lambda)$. 取 $\lambda=1-t$，就有(3.7.3). 若 $r(z)$在 Ω 上除去一个低维流形外，是一阶连续可微的，则由(3.7.2)，对所有 $\lambda\in[0,1]$有

$$\frac{r(z)-r(z_\lambda)}{1-\lambda}\geqslant 0.$$

因此

$$\lim_{\lambda\to1^-}\frac{r(z)-r(z_\lambda)}{1-\lambda}\geqslant 0.$$

这就是

$$\left.\frac{\mathrm{d}r(z_\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=1}=\sum_{i,j}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z_i}\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}w_j}w_j+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\bar{z}_i}\frac{\mathrm{d}\bar{z}_i}{\mathrm{d}\overline{w}_j}\overline{w}_j\right)\geqslant 0, \qquad (3.7.4)$$

这里 $w=(w_1,\cdots,w_n)'=f$.

另一方面，

$$f^{-1*}\mathrm{d}r=2\Re\mathrm{e}\left(\sum_{i,j}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z_i}\cdot\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}w_j}\mathrm{d}w_j\right),$$

$$\mathrm{d}\rho^2=2\Re\mathrm{e}\left(\sum_k\overline{w}_k\mathrm{d}w_k\right),\ \mathrm{d}\rho=\Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{\rho}\sum_k\overline{w}_k\mathrm{d}w_k\right),$$

因此

$$\langle f^{-1*}\mathrm{d}r,\mathrm{d}\rho\rangle|_{w=f(z)}=\Re\mathrm{e}\left\{\frac{4}{\rho}\sum_{i,j}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z_i}\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}w_j}w_j\right\}.$$

由(3.7.4)，即得(3.7.1).

这就证明了定理3.7.3.

定理3.7.2及3.7.3给出了 r-域上局部双全纯映照成为双全纯星形映照的充要条件. 有了这两个定理，就可以立即推出以往已知的几乎所有的结果.

1. 若 $B_p=\left\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:\|z\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}<1\right\}$,

$p\geqslant 1$，取 $r(z)=\dfrac{\sum|z_i|^p}{1-\sum|z_i|^p}$，显然，这是 B_p 上的连续穷竭函数，且只有一个零点，故 B_p 是 r-域. 应用定理3.7.2及3.7.3，即得 Suffridge 定理(文献[3.19]). 由定理3.7.1，当 $p>0$ 时，定理也成立.

2. 若 $D=\left\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in \mathbf{C}^n:\sum_{i=1}^{n}|z_i|^{p_i}<1,2p_n>p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_n>1\right\}$，取 $r(z)=\dfrac{\sum|z_i|^{p_i}}{1-\sum|z_i|^{p_i}}$. 显然这是 D 上的连续穷竭函数，且只有一个零点，故 D 是 r-域，而且已经证明了(见文献[3.4]定理6.2.2)若 $g(z):D\to D, g(0)=0$，则 $u(z)\geqslant u(g(z))$，这里 $u(z)=\sum|z_i|^{p_i}$. 由此即可导出 $r(z)\geqslant r(g(z))$. 应用定理3.7.2及3.7.3，即得余其煌、王世坤、龚昇的结果(文献[3.7]). 陈正[3.2]以及林运泳与洪毅[3.11]证明了：当 $p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_n>1$时，定理依然成立，即条件$2p_n>p_1$可以不必要，这改进了余其煌、王世坤、龚昇的结果，但是由定理3.7.1，当 $p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_n>0$时，定理也是成立的. 这又改进了陈正以及林运泳与洪毅的结果.

3. 若 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 为有界凸圆型域，取 $r(z)=\dfrac{p(z)}{1-p(z)}$，这里 $p(z)$ 为 Ω 的 Minkowski 泛函，显然 $r(z)$是 Ω 上的连续穷竭函数，且只有一个零点，故 Ω 为 r-域. 在§3.3中引理3.3.1已证明了：若 $g(z):\Omega\to\Omega, g(0)=0$，则 $p(z)\geqslant p(g(z))$，因此 $r(z)\geqslant r(g(z))$. 应用定理3.7.2及3.7.3，即可得到陈正[3.2]以及林运泳与洪毅[3.11]的结果. 显然，定理3.7.1推广了他们的结果.

4. 若 Ω 为 Carathéodory 完备域. 取 $r(z)=C_\Omega(0,z)$，即0点与 z 点的 Carathéodory 距离. 由于 Ω 为 Carathéodory 完备域，故点集：$\{z\in\Omega:C_\Omega(0,z)<a\}(a>0)$在 Ω 中相对紧，所以 $C_\Omega(0,z)$是 Ω 上的连续穷竭函数，且只有一个零点，故 Ω 为 r-域. 此外，已知 Carathéodory 距离有收缩性质(Krantz[3.10])，即定理3.7.3中的条件2成立. 应用定理3.7.2及3.7.3，即得到余其煌、王世坤、龚昇的结果(文献[3.4]中定理6.3.2).

综上所述，可见从某种意义上讲，定理3.7.2及3.7.3给出了十分一般的星形映照的判别准则.

参 考 文 献

[3.1] Barnard K W, FitzGerald C H and Gong Sheng. Distortion theorem for biholomorphic mapping in C^n, Tran Amer Math Soc, 1994, 344:907～924

[3.2] 陈正. C^n中一类有界严格平衡域上的双全纯映照及星映照的刻画. 数学年刊, 1995, 16A:230～237

[3.3] Franzoni T and Vensentini E. Holomorphic maps and invariant distance. North-Holland, 1980

[3.4] 龚昇. 多复变数的凸映照与星形映照. 纯粹数学与应用数学专著第34号，科学出版社，1995

[3.5] Gong Sheng and Liu Taishun. Distortion theorem for biholomorphic convex mappings on bounded circular convex domains. Preprint

[3.6] Gong Sheng, Wang Shikun and Yu Qihuang. Biholomorphic convex mappings of ball in C^n. Pacific Jour of Math, 1993, 161:287～301

[3.7] 龚昇，余其煌，王世坤. 有界星形圆型域上全纯映照成为星形映照的判别准则. 数学学报

[3.8] Hua Luo keng (华罗庚). Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains. Transl Amer Math Soc, Vol 6, 1963

[3.9] Kikuchi K. Starlike and convex mappings in several complex variables. Pacific Jour of Math, 1973, 44:569～580

[3.10] Krantz S G. Function theory of several complex variables. 2nd edition, Wadsworth & Brooks/col, 1992

[3.11] 林运泳，洪毅. Banach 空间中全纯映射的若干性质. 数学学报，1995, 38:234～241

[3.12] Liu Taishun (刘太顺). The distortion theorem for biholomorphic mappings in C^n. Preprint, 1989

[3.13] Liu Taishun and Ren Guangbin (刘太顺，任广斌). Decomposition theorem of normalized biholomorphic convex mappings. Preprint, 1996

[3.14] Liu Taishun and Ren Guangbin (刘太顺，任广斌). The growth and $\frac{1}{4}$-covering theorems for the normalized starlike mappings on bounded starlike and circular domains. Chinese Annals of Math (to appear)

[3.15] Liu Taishun and Ren Guangbin (刘太顺,任广斌). The growth theorem of convex mappings on bounded convex circular domains. Preprints, 1997

[3.16] Liu Taishun and Zhang Wenjun (刘太顺,张文俊). On the homogeneous expansions of normalized biholomorphic convex mappings over B^p. Science in China, Series A 1997,27:385～392

[3.17] Mok Ngaiming and Tsai I-Hsun. Rigidity of convex realizations of irreducible bounded symmetric domains of rank≥2. Jour für die reine und angew Math, 1992,43:91～122

[3.18] Pfaltzgraff T J and Suffridge T J. Linear invariance, order and convex maps in C^n. Research report 96-6, University of Kentucky, 1996

[3.19] Poletskii E A and Shabat B V. Invariant metrices, Several Complex Variables Ⅱ, G M Khenkin (ed) Springer-Verlag, 1989,63～112

[3.20] Suffridge T J. The principle of subordination applied to function of several variables. Pacific J. of Math, 1970,33:241～248

[3.21] Suffridge T J. Starlike and convex maps in Banach spaces, Pacific J of Math, 1973,46:575～589.

[3.22] Zhu Yucan. Biholomorphic convex mapping in B_p, Chinese Annals of Math. (to appear)

[3.23] Lempert L. La metrique Kobayashi et las representation des domains sur la boule, Bull Soc Math France, 1981,109:427～474

[3.24] Jarnicki M, Pflug P. Invariant distances and metrics in complex analysis, de Gruyter, Berlin-New York, 1993